

Plaquette 4 - Inversibilité, changement de base et similitude

Calcul matriciel — Licence 1 (L1)

Exercices

Méthode

Une matrice carrée est inversible pour de multiples raisons équivalentes (rang maximal, noyau nul, déterminant non nul, polynôme annulateur à terme constant non nul). On choisit le critère le plus adapté, on **calcule** l'inverse par la méthode la plus économique, on résout des **équations matricielles** en respectant le côté de la multiplication, et on interprète une matrice comme l'expression d'une application linéaire **dans une base** : changer de base, c'est remplacer A par une matrice **semblable** $P^{-1}AP$, qui partage trace, déterminant, rang et puissances.

Exercice 1 - Inversibilité selon un paramètre

Soit $A_a = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 4 \\ 1 & a & a^2 \end{pmatrix}$.

- Échelonner A_a et montrer que son déterminant vaut $(a-1)(a-2)$.
- En déduire les valeurs de a pour lesquelles A_a est inversible.
- Pour $a=1$, déterminer le noyau de A_1 .
- Interpréter à l'aide de l'interpolation : que signifie $A_a X = Y$ pour $X = (c_0, c_1, c_2)$?

Exercice 2 - Inverse par un polynôme annulateur

Soit $A \in M_n(\mathbb{R})$ telle que $A^2 - 3A + 2I_n = 0$.

- Montrer que A est inversible et exprimer A^{-1} en fonction de A .
- Vérifier avec $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$.
- Montrer que $(A - I_n)(A - 2I_n) = 0$ et en déduire que $A - I_n$ et $A - 2I_n$ ne sont pas toutes deux inversibles.
- Une matrice vérifiant $A^2 = 3A$ peut-elle être inversible ? Quand ?

Exercice 3 - Équations $AX = B$ et $XA = B$

Soient $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 5 & 3 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$.

- Calculer A^{-1} .
- Résoudre $AX = B$ puis $XA = B$ d'inconnue $X \in M_2(\mathbb{R})$.
- Les deux solutions sont-elles égales ? Pourquoi ?
- Résoudre $AXA = B$.

Exercice 4 - Inverse d'un produit et d'une transposée

- a) Montrer que si A et B sont inversibles, AB l'est et $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$.
- b) Montrer que A est inversible si et seulement si A^T l'est, et $(A^T)^{-1} = (A^{-1})^T$.
- c) Montrer que si AB est inversible (matrices carrées), alors A et B le sont.
- d) Contre-exemple : trouver $A \in M_{2,3}$ et $B \in M_{3,2}$ avec $AB = I_2$; BA est-elle inversible ?

Exercice 5 - Inverse à droite et inverse à gauche

Soient $A, B \in M_n(\mathbb{R})$ avec $AB = I_n$.

- a) Montrer que B est injective au sens où $BX = 0 \Rightarrow X = 0$.
- b) En déduire que B est inversible.
- c) Conclure que $BA = I_n$.
- d) Application : sachant que $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 7 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 7 & -2 \\ -3 & 1 \end{pmatrix} = I_2$, que vaut le produit dans l'autre sens ?

Exercice 6 - Coordonnées dans une nouvelle base

Dans $\mathbb{R}^2$, on considère la base $B' = (u_1, u_2)$ avec $u_1 = (1, 1)$ et $u_2 = (1, -1)$.

- a) Justifier que B' est une base et écrire la matrice de passage P de la base canonique à B' .
- b) Le vecteur $v = (5, 1)$ a pour coordonnées X' dans B' : les calculer par $X' = P^{-1}X$.
- c) Vérifier en recombinaison.
- d) Un vecteur a pour coordonnées $(2, -3)$ dans B' ; quelles sont ses coordonnées canoniques ?

Exercice 7 - Invariants de similitude

Deux matrices A, B sont **semblables** s'il existe P inversible avec $B = P^{-1}AP$.

- a) Montrer que deux matrices semblables ont même trace, même déterminant et même rang.
- b) Les matrices I_2 et $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ ont même trace et même déterminant. Sont-elles semblables ?
- c) Les matrices $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 1 & 5 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$ sont-elles semblables ? (Chercher P dont les colonnes sont des vecteurs V avec $BV = V$ et $BV = 2V$.)
- d) Montrer que si $B = P^{-1}AP$, alors $B^n = P^{-1}A^nP$.

Exercice 8 - Diagonaliser une matrice symétrique

Soit $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$.

- a) Déterminer les réels λ tels que $A - \lambda I_2$ ne soit pas inversible.
- b) Pour chacun, trouver un vecteur non nul V avec $AV = \lambda V$.
- c) Former P et calculer $P^{-1}AP$.
- d) Vérifier que les deux vecteurs de b) sont orthogonaux, et en déduire une matrice Q orthogonale ($Q^{-1} = Q^T$) qui diagonalise A .

Exercice 9 - Inverse d'une matrice tridiagonale

Soit $T = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}$.

- a) Montrer que T est inversible (échelonner).
- b) Calculer T^{-1} par Gauss-Jordan.
- c) Vérifier $TT^{-1} = I_3$ sur la première ligne.
- d) Remarquer que T^{-1} est symétrique et à coefficients positifs, alors que T a des coefficients négatifs. Interpréter en termes de « diffusion ».

Exercice 10 - L'identité $I + AB$ et $I + BA$

Soient $A \in M_{n,p}$ et $B \in M_{p,n}$.

- a) Montrer que si $I_n + AB$ est inversible, alors $I_p + BA$ l'est, avec $(I_p + BA)^{-1} = I_p - B(I_n + AB)^{-1}A$.
- b) Application avec $A = (1 \ 2)$ (ligne) et $B = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}$ (colonne) : calculer $I + AB$ et $(I_2 + BA)^{-1}$.
- c) Vérifier le résultat de b).
- d) Montrer que AB et BA n'ont pas la même taille en général, mais que pour A, B carrées de même taille, AB et BA ont la même trace.

Exercice 11 - Diagonale strictement dominante

Une matrice $A = (a_{ij}) \in M_n(\mathbb{R})$ est à **diagonale strictement dominante** si $|a_{ii}| > \sum_{j \neq i} |a_{ij}|$ pour tout i .

a) Vérifier que $A = \begin{pmatrix} 4 & 1 & 1 \\ 1 & 5 & 2 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}$ a cette propriété.

- b) Soit $X \neq 0$ avec $AX = 0$, et i tel que $|x_i| = \max_j |x_j| > 0$. En écrivant la ligne i , aboutir à une contradiction.
- c) En déduire que A est inversible (théorème de Hadamard) ; contrôler avec $\det A$.
- d) La réciproque est-elle vraie ?

Exercice 12 - Colonnes libres et matrice de Gram

Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$.

- Calculer $G = A^T A$ et son déterminant.
- Montrer en général que $A^T A$ est inversible si et seulement si les colonnes de A sont libres (utiliser $\ker(A^T A) = \ker A$).
- Pourquoi AA^T (3×3) n'est-elle pas inversible ici ?
- Interpréter G : que représentent ses coefficients ?

Exercice 13 - Inverse d'une unipotente paramétrée

Soit $U_a = \begin{pmatrix} 1 & a & a^2 \\ 0 & 1 & a \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

- Montrer que $U_a = I_3 + aN + a^2N^2$ avec $N = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.
- Vérifier que $(I_3 - aN)U_a = I_3$ et en déduire U_a^{-1} .
- Calculer $U_a U_b$. Est-ce une matrice de la forme U_c ?
- Montrer que $U_a = (I_3 - aN)^{-1}$ et interpréter comme une série géométrique.

Exercice 14 - Puissances par conjugaison

Soit $B = \begin{pmatrix} 1 & 5 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$ et $P = \begin{pmatrix} 1 & 5 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ (voir l'exercice « Invariants de similitude »).

- Rappeler que $P^{-1}BP = D = \text{diag}(1, 2)$.
- En déduire $B^n = PD^nP^{-1}$ explicitement.
- Vérifier pour $n = 2$ par un calcul direct.
- Comparer avec la formule de la plaquette 3 pour les triangulaires 2×2 .

Exercice 15 - Synthèse : matrice d'une projection oblique

Dans $\mathbb{R}^2$, soit p la projection sur $D_1 = \text{Vect}(1, 2)$ parallèlement à $D_2 = \text{Vect}(1, -1)$.

- Justifier que $B' = ((1, 2), (1, -1))$ est une base et donner la matrice de p dans B' .
- En déduire la matrice M de p dans la base canonique par la formule de changement de base.
- Vérifier que $M^2 = M$, $\text{tr} M = 1$ et que $M(1, 2) = (1, 2)$, $M(1, -1) = 0$.
- Calculer le projeté du vecteur $(3, 0)$ et le vérifier géométriquement.