

Plaquette 5 - Matrices en action : géométrie, dynamique et codage

Calcul matriciel — Licence 1 (L1)

Exercices

Méthode

Une matrice est avant tout une **transformation** : elle déplace des points (géométrie), fait évoluer un état (populations, probabilités), ou encode de l'information (codes correcteurs). Dans chaque exercice on **construit** la matrice à partir de la situation (colonne j = image du j -ème vecteur de base, ou coefficient (i, j) = contribution de j à i), on **calcule** (produits, puissances, inverses), puis on **interprète** : l'ordre des facteurs est l'ordre des opérations, le déterminant mesure les aires, la valeur propre dominante le taux de croissance.

Exercice 1 - Modèle de Leslie

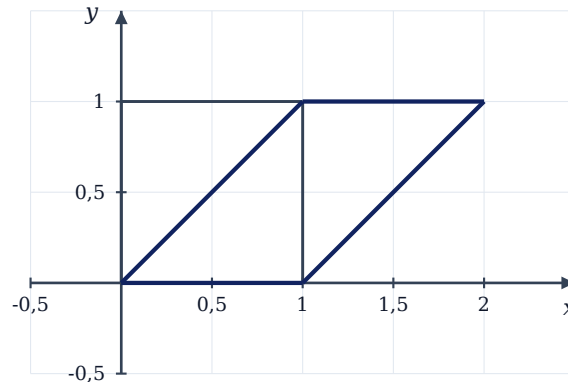
Une population est répartie en trois classes d'âge (jeunes, adultes, vieux), de vecteur X_n l'année n . Chaque adulte donne en moyenne 1,5 jeune, chaque vieux 1 jeune ; 50 % des jeunes deviennent adultes et 80 % des adultes deviennent vieux ; les vieux meurent.

- Écrire la matrice de Leslie L telle que $X_{n+1} = LX_n$.
- Avec $X_0 = (100, 100, 100)$, calculer X_1 et X_2 .
- Calculer la population totale sur les trois années.
- Pourquoi L a-t-elle cette forme particulière (première ligne pleine, sous-diagonale) ?

Exercice 2 - Composer rotation et cisaillement

Soient R la rotation d'angle $\frac{\pi}{2}$ et $C = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ le cisaillement horizontal.

- Écrire R et calculer RC et CR .
- Décrire géométriquement « d'abord C , puis R » et « d'abord R , puis C ». Lequel correspond à RC ?
- Calculer l'image du carré unité $((0, 0), (1, 0), (1, 1), (0, 1))$ par C et son aire.
- Vérifier avec les déterminants que les deux composées conservent les aires.



Le carré unité et son image par le cisaillement C (trait épais).

Exercice 3 - Coordonnées homogènes et rotation autour d'un point

On représente le point (x, y) par la colonne $(x, y, 1)$.

- Écrire la matrice $T_{(a,b)}$ de la translation de vecteur (a, b) et la matrice R de la rotation de centre O et d'angle $\frac{\pi}{2}$ (en 3×3).
- Pour $(a, b) = (2, 0)$, calculer l'image de $(1, 0)$ par $T \circ R$ et par $R \circ T$. Conclure.
- Montrer que la rotation de centre $\Omega(1, 1)$ et d'angle $\frac{\pi}{2}$ a pour matrice $T_{(1,1)} R T_{(-1,-1)}$, et la calculer.
- Vérifier que Ω est fixe et calculer l'image de O .

Exercice 4 - Composer deux réflexions

Pour $\theta \in \mathbb{R}$, $S(\theta) = \begin{pmatrix} \cos 2\theta & \sin 2\theta \\ \sin 2\theta & -\cos 2\theta \end{pmatrix}$.

- Vérifier que $S(\theta)$ fixe le vecteur $(\cos \theta, \sin \theta)$ et change $(-\sin \theta, \cos \theta)$ en son opposé. En déduire que c'est la réflexion d'axe la droite d'angle θ .
- Calculer $\det S(\theta)$ et $S(\theta)^2$.
- Montrer que $S(\beta)S(\alpha) = R(2(\beta - \alpha))$.
- Application : écrire la réflexion d'axe $y = x$ et celle d'axe $y = 0$, et vérifier c) sur leur composée.

Exercice 5 - Rotations de l'espace

Soient R_z la rotation d'angle $\frac{\pi}{2}$ autour de l'axe Oz et R_x la rotation d'angle $\frac{\pi}{2}$ autour de Ox (sens direct).

- Écrire R_z et R_x en calculant les images de e_1, e_2, e_3 .
- Calculer $R_z R_x e_1$ et $R_x R_z e_1$. Les rotations de l'espace commutent-elles ?
- Calculer R_z^4 et $\det R_z$.
- Montrer que $R_z R_x$ est une matrice orthogonale ($M^T M = I_3$).

Exercice 6 - Aire et déterminant

Soit $M = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$.

- Déterminer l'image du carré unité par M et calculer son aire géométriquement.
- Comparer avec $\det M$.
- Quelle est l'aire de l'image par M du disque unité ?
- Que signifie géométriquement $\det M = 0$? Donner un exemple.

Exercice 7 - Code correcteur de Hamming

On travaille modulo 2. Soit $H = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$: sa colonne j est l'écriture

binaire de j (bit de poids faible en haut). Un mot $c \in \{0, 1\}^7$ est **valide** si $Hc = 0$.

- Vérifier que $c = (1, 1, 1, 0, 0, 0, 0)$ est valide.
- On reçoit $r = (1, 1, 1, 0, 1, 0, 0)$. Calculer le **syndrome** Hr .
- Montrer que si $r = c + e_j$ (une erreur en position j), alors Hr est la colonne j de H . Corriger r .
- Pourquoi ce code corrige-t-il toute erreur **unique**, mais pas deux erreurs ?

Exercice 8 - Ruine du joueur

Un joueur possède 1 ou 2 euros ; à chaque partie il gagne ou perd 1 € avec probabilité $\frac{1}{2}$. Il s'arrête à 0 € (ruine) ou 3 € (objectif). Les états 1 et 2 sont **transitoires**.

- Écrire la matrice Q des transitions entre les états 1 et 2, et la matrice R des transitions vers 0 et 3.
- Calculer $N = (I_2 - Q)^{-1}$ (matrice fondamentale).
- Le nombre moyen de parties avant l'arrêt en partant de l'état i est la somme de la ligne i de N . Le calculer.
- Les probabilités d'absorption sont données par $B = NR$. Calculer la probabilité de ruine en partant de 1 €.

Exercice 9 - Masses et ressorts

Deux masses sur un rail horizontal sont reliées entre elles et aux deux murs par trois ressorts identiques de raideur $k = 100 \text{ N/m}$. On applique les forces $f_1 = 10 \text{ N}$ et $f_2 = 20 \text{ N}$ (vers la droite). À l'équilibre, les déplacements x_1, x_2 vérifient $KX = F$.

- Justifier que $K = \begin{pmatrix} 2k & -k \\ -k & 2k \end{pmatrix}$ (bilan des forces de rappel sur chaque masse).
- Calculer K^{-1} et les déplacements.
- Vérifier l'équilibre de la masse 1.
- Interpréter le coefficient $(K^{-1})_{12}$.

Exercice 10 - Matrice de covariance

On mesure deux grandeurs sur trois individus : (1, 2), (2, 3), (3, 7).

- Calculer les moyennes et la matrice Y (3×2) des données centrées.
- Calculer $C = \frac{1}{3}Y^T Y$ (matrice de covariance). Interpréter ses coefficients.
- Montrer que C est symétrique et que $u^T C u \geq 0$ pour tout u .
- Calculer le coefficient de corrélation $\frac{c_{12}}{\sqrt{c_{11}c_{22}}}$.

Exercice 11 - Classement de pages web

Trois pages web : la page 1 pointe vers 2 et 3, la page 2 vers 3, la page 3 vers 1. Un surfeur suit un lien au hasard parmi ceux de la page où il se trouve.

- Écrire la matrice M dont la colonne j donne les probabilités d'aller de la page j vers chaque page.
- Le **score** r vérifie $Mr = r$ et $r_1 + r_2 + r_3 = 1$. Résoudre.
- Quelle page est la mieux classée ? Pourquoi la page 3, qui reçoit deux liens, n'est-elle pas seule en tête ?
- Vérifier que chaque colonne de M somme à 1, et en déduire que $M - I$ n'est pas inversible.

Exercice 12 - Exponentiation rapide

On veut calculer A^{100} pour une matrice carrée A .

- Combien de produits matriciels faut-il par la méthode naïve $A \cdot A \cdots A$?
- Écrire 100 en binaire. Montrer qu'avec les carrés successifs $A^2, A^4, \dots, A^{64}$ on obtient A^{100} en 8 produits.
- Pour des matrices $n \times n$ (environ $2n^3$ opérations par produit), estimer le gain pour $n = 100$.
- Appliquer la méthode à $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}^{12}$ et en déduire F_{12} .

Exercice 13 - Transformations successives d'une image

Un logiciel applique à une image : une homothétie de rapport 2 (H), puis une rotation d'angle $\frac{\pi}{2}$ (R), puis une réflexion d'axe Ox (S).

- Écrire les trois matrices et la matrice M de la transformation totale (attention à l'ordre).
- Calculer $\det M$ et interpréter (aire, orientation).
- Déterminer M^{-1} (la transformation qui annule l'effet) en utilisant $M^{-1} = H^{-1}R^{-1}S^{-1}$.
- Le point $(1, 2)$ de l'image devient quel point ?

Exercice 14 - Équilibre d'un réseau de températures

Trois pièces en enfilade échangent de la chaleur. La température de chaque pièce le lendemain est une moyenne : $T_1' = \frac{1}{2}T_1 + \frac{1}{2}T_2$, $T_2' = \frac{1}{4}T_1 + \frac{1}{2}T_2 + \frac{1}{4}T_3$, $T_3' = \frac{1}{2}T_2 + \frac{1}{2}T_3$.

- Écrire la matrice A telle que $T' = AT$, et vérifier que chaque ligne somme à 1.
- Montrer que tout vecteur constant (c, c, c) est un équilibre.
- Partant de $T = (20, 10, 0)$, calculer T après un et deux jours.
- Montrer que la quantité $T_1 + 2T_2 + T_3$ est **conservée**, et en déduire la température d'équilibre finale.

Exercice 15 - Synthèse : population et nombre d'or

Une population a deux classes d'âge (jeunes j_n , adultes a_n) : chaque adulte produit 2 jeunes et chaque jeune produit 1 jeune ; 50 % des jeunes deviennent adultes, les adultes meurent. Ainsi $X_{n+1} = LX_n$ avec $L = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ \frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix}$.

- Calculer $\det(L - \lambda I_2)$ et montrer que les valeurs propres sont $\varphi = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}$ et $\psi = \frac{1 - \sqrt{5}}{2}$.
- Déterminer un vecteur propre associé à φ .
- Partant de $X_0 = (10, 10)$, calculer $X_1, \dots, X_3$ et le rapport $\frac{j_n}{a_n}$. Vers quoi tend-il ?
- Expliquer pourquoi la population totale est multipliée, à long terme, par environ 1,618 chaque année.