

Plaquette 1 - Produit, inverse, rang et puissances de matrices

Calcul matriciel — Licence 1 (L1)

Exercices

Méthode

On maîtrise le produit matriciel et ses pièges, on inverse par **Gauss-Jordan** ou par la formule 2×2 , on calcule un **rang** par échelonnement, et on obtient les puissances par récurrence ou par un **polynôme annulateur**.

Exercice 1 - Produit matriciel

Calculer AB et BA pour $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$.

Exercice 2 - Diviseurs de zéro

Trouver deux matrices non nulles A, B de $M_2(\mathbb{R})$ telles que $AB = 0$.

Exercice 3 - Inverse d'une matrice 2x2

Inverser $A = \begin{pmatrix} 4 & 7 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$.

Exercice 4 - Inversion par Gauss-Jordan

Inverser $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Exercice 5 - Rang d'une matrice

Déterminer le rang de $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}$.

Exercice 6 - Puissances par récurrence

Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. Calculer A^n .

Exercice 7 - Puissances par le binôme

Soit $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$. Calculer A^n .

Exercice 8 - Polynôme annulateur

Soit $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$. Montrer que $A^2 = 4A - 3I$ et en déduire A^{-1} .

Exercice 9 - Transposée et symétrie

Décomposer $A = \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$ en somme d'une matrice symétrique et d'une antisymétrique.

Exercice 10 - Résolution matricielle d'un système

Résoudre $\begin{cases} 4x + 7y = 2 \\ x + 2y = 1 \end{cases}$ par l'inverse de la matrice.

Exercice 11 - Matrices qui commutent

Déterminer toutes les matrices de $M_2(\mathbb{R})$ commutant avec $D = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$.

Exercice 12 - Trace

Montrer que $\text{tr}(AB) = \text{tr}(BA)$, et en déduire qu'il n'existe pas de matrices telles que $AB - BA = I_n$.

Exercice 13 - Matrice nilpotente et inverse de $I - N$

Soit $N = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

- Calculer N^2 et N^3 . On dit que N est **nilpotente**.
- Vérifier l'identité $(I_3 - N)(I_3 + N + N^2) = I_3 - N^3$.
- En déduire que $I_3 - N$ est inversible et calculer son inverse.
- Retrouver ce résultat par Gauss-Jordan sur $I_3 - N$.

Exercice 14 - Produit de matrices triangulaires

Soient $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 4 & 5 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$.

- Calculer AB .
- Démontrer que le produit de deux matrices triangulaires supérieures $n \times n$ est triangulaire supérieure (écrire le coefficient $(AB)_{ij}$ pour $i > j$).
- Montrer que la diagonale de AB est le produit terme à terme des diagonales.
- En déduire une condition simple pour qu'une matrice triangulaire soit inversible.

Exercice 15 - Synthèse : suites couplées

Soient $u_0 = 1$, $v_0 = 0$ et $\begin{cases} u_{n+1} = 3u_n + v_n \\ v_{n+1} = u_n + 3v_n \end{cases}$. Exprimer u_n et v_n .