

Plaque 3 - Puissances de matrices et applications

Calcul matriciel — Licence 1 (L1)

Exercices

Méthode

Calculer A^n est un problème central (suites récurrentes, graphes, chaînes de Markov). Quatre méthodes, à choisir selon la matrice : **diagonalisation** $A = PDP^{-1}$ donc $A^n = PD^nP^{-1}$; **binôme de Newton** pour $A = \lambda I + N$ avec N nilpotente (qui commute avec λI) ; **polynôme annulateur** et reste de la division de X^n ; **réurrence** quand on devine la forme. On contrôle toujours sur $n = 0$, $n = 1$ et un calcul direct.

Exercice 1 - Diagonaliser pour calculer une puissance

Soient $A = \begin{pmatrix} 4 & -2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ et $P = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$.

- Calculer P^{-1} puis $D = P^{-1}AP$.
- En déduire A^n pour tout $n \in \mathbb{N}$.
- Vérifier pour $n = 0$, $n = 1$ et $n = 5$ (on a $A^5 = \begin{pmatrix} 454 & -422 \\ 211 & -179 \end{pmatrix}$).
- En déduire $\text{tr}(A^n)$ et contrôler pour $n = 5$.

Exercice 2 - Binôme avec une nilpotente

Soit $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} = 2I_3 + N$.

- Calculer N^2 et N^3 .
- Justifier l'emploi du binôme de Newton et en déduire A^n .
- Vérifier pour $n = 5$ ($A^5 = \begin{pmatrix} 32 & 80 & 80 \\ 0 & 32 & 80 \\ 0 & 0 & 32 \end{pmatrix}$).
- La formule obtenue reste-t-elle valable pour $n = -1$? Vérifier que la matrice obtenue est bien A^{-1} .

Exercice 3 - La matrice de Fibonacci

Soit $F = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ et (F_n) la suite de Fibonacci ($F_0 = 0$, $F_1 = 1$).

- Montrer par récurrence que $F^n = \begin{pmatrix} F_{n+1} & F_n \\ F_n & F_{n-1} \end{pmatrix}$ pour $n \geq 1$.
- En calculant le déterminant, retrouver l'identité de Cassini $F_{n+1}F_{n-1} - F_n^2 = (-1)^n$.
- En écrivant $F^{m+n} = F^m F^n$, montrer que $F_{m+n} = F_{m+1}F_n + F_m F_{n-1}$.
- En déduire $F_{2n} = F_n(F_{n+1} + F_{n-1})$ et vérifier pour $n = 5$.

Exercice 4 - Chemins dans un graphe

Quatre villes sont reliées par des routes : 1-2, 1-3, 2-3, 2-4, 3-4. On note G la matrice d'adjacence ($g_{ij} = 1$ si i et j sont reliées, 0 sinon).

- Écrire G et justifier que $(G^2)_{ij}$ compte les chemins de longueur 2 de i à j .
- Calculer G^2 et G^3 . Combien y a-t-il de chemins de longueur 3 de 1 à 4 ?
- Interpréter la diagonale de G^2 .

- Montrer que le nombre de triangles du graphe est $\frac{\text{tr}(G^3)}{6}$ et le vérifier.

Exercice 5 - Matrice des uns

Soit $J \in M_3(\mathbb{R})$ la matrice dont tous les coefficients valent 1, et $A = I_3 + J$.

- Calculer J^2 et en déduire J^k pour $k \geq 1$.
- Par le binôme, montrer que $A^n = I_3 + \frac{4^n - 1}{3}J$.
- Vérifier pour $n = 3$ (A^3 a 22 sur la diagonale et 21 ailleurs).
- Montrer que A est inversible et que $A^{-1} = I_3 - \frac{1}{4}J$; la formule de b) vaut-elle pour $n = -1$?

Exercice 6 - Matrice symétrique 2×2

Soit $M = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} = 2I_2 + J$ avec $J = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$.

- Calculer J^2 et en déduire M^n par le binôme.
- Vérifier pour $n = 4$ ($M^4 = \begin{pmatrix} 136 & 120 \\ 120 & 136 \end{pmatrix}$).
- Retrouver le résultat en diagonalisant M avec les vecteurs $(1, 1)$ et $(1, -1)$.
- Étudier le comportement de $\frac{M^n}{4^n}$ quand $n \rightarrow +\infty$.

Exercice 7 - Puissances d'une matrice de transition

Soit $Q = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{4} & \frac{3}{4} \end{pmatrix}$ (matrice de transition d'une chaîne de Markov à deux états) et $L = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \end{pmatrix}$.

- Vérifier que $QL = LQ = L$ et $L^2 = L$.
- Montrer que $Q = L + \frac{1}{4}(I_2 - L)$, et que $L(I_2 - L) = 0$.
- En déduire $Q^n = L + \frac{1}{4^n}(I_2 - L)$ et vérifier pour $n = 3$ ($Q^3 = \begin{pmatrix} \frac{11}{32} & \frac{21}{32} \\ \frac{21}{64} & \frac{43}{64} \end{pmatrix}$).

d) Quelle est la limite de Q^n ? Interpréter.

Exercice 8 - Exponentielle d'une matrice nilpotente

Soit $N = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ et, pour $t \in \mathbb{R}$, $E(t) = I_3 + tN + \frac{t^2}{2}N^2$.

- Écrire $E(t)$ explicitement.
- Montrer que $E(s)E(t) = E(s+t)$.
- En déduire que $E(t)$ est inversible d'inverse $E(-t)$.
- Montrer que $X(t) = E(t)X_0$ vérifie $X'(t) = NX(t)$, et résoudre $x' = y$, $y' = z$, $z' = 0$ avec $X(0) = (1, 2, 3)$.

Exercice 9 - Une matrice non diagonalisable

Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$.

- Vérifier que $(A - 2I_2)^2 = 0$.
- Écrire $A = 2I_2 + N$ et calculer A^n .
- Vérifier pour $n = 3$ ($A^3 = \begin{pmatrix} -4 & 12 \\ -12 & 20 \end{pmatrix}$).
- Montrer que A n'est pas diagonalisable : si $A = PDP^{-1}$ avec D diagonale, que vaudrait $(D - 2I)^2$?

Exercice 10 - Puissances d'une triangulaire 2×2

Soient $a \neq c$ et $T = \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & c \end{pmatrix}$.

- Montrer par récurrence que $T^n = \begin{pmatrix} a^n & b \frac{a^n - c^n}{a - c} \\ 0 & c^n \end{pmatrix}$.
- Que devient la formule quand $c \rightarrow a$? Retrouver le cas $a = c$ par le binôme.
- Application : $T = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$; calculer T^4 .
- Vérifier par un calcul direct de T^2 puis $T^4 = (T^2)^2$.

Exercice 11 - Matrice de permutation circulaire

Soit $C = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

- Calculer CX pour $X = (x, y, z)^T$, puis C^2 et C^3 .
- En déduire C^n selon n modulo 3, et C^{-1} .
- Montrer que $I_3 + C + C^2 = J$ (matrice des uns).

d) Calculer $(I_3 + C)^3$ en utilisant $C^3 = I_3$ et le binôme.

Exercice 12 - Suite vectorielle affine

On étudie $X_{n+1} = AX_n + B$ avec $A = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{3} \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ et $X_0 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$.

- Déterminer le point fixe L tel que $L = AL + B$.
- Montrer que $Y_n = X_n - L$ vérifie $Y_{n+1} = AY_n$, et en déduire $X_n = L + A^n(X_0 - L)$.
- Donner X_n explicitement et sa limite.
- Calculer X_1, X_2 directement et par la formule.

Exercice 13 - Puissances d'une symétrie combinée

Soit S une matrice telle que $S^2 = I$, et $P = \frac{I+S}{2}$, $Q = \frac{I-S}{2}$.

- Montrer que $P^2 = P$, $Q^2 = Q$, $PQ = QP = 0$ et $P + Q = I$.
- Pour a, b réels, montrer que $(aP + bQ)^n = a^n P + b^n Q$.
- Écrire $M = \alpha I + \beta S$ sous la forme $aP + bQ$ et en déduire M^n .
- Application : $S = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, $M = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$; retrouver le résultat de l'exercice « Matrice symétrique 2×2 ».

Exercice 14 - Trace des puissances

Soit $A \in M_2(\mathbb{R})$ de trace s et de déterminant p .

- Rappeler que $A^2 = sA - pI_2$ (Cayley-Hamilton), et en déduire $t_{n+2} = st_{n+1} - pt_n$ où $t_n = \text{tr}(A^n)$.
- Calculer t_0, t_1 , puis t_2 et t_3 en fonction de s et p .
- Application : $A = \begin{pmatrix} 4 & -2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$; calculer t_5 par la récurrence et comparer avec $2^5 + 3^5$.
- Montrer que si A a les valeurs propres λ, μ , alors $t_n = \lambda^n + \mu^n$ (sommes de Newton).

Exercice 15 - Synthèse : puissances par Cayley-Hamilton

Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -2 & 4 \end{pmatrix}$.

- Montrer que $A^2 - 5A + 6I_2 = 0$.
- Déterminer le reste $R_n = a_n X + b_n$ de la division de X^n par $X^2 - 5X + 6$, et en déduire $A^n = a_n A + b_n I_2$.
- Vérifier pour $n = 3$ ($A^3 = \begin{pmatrix} -11 & 19 \\ -38 & 46 \end{pmatrix}$).
- Retrouver ce résultat par diagonalisation en cherchant des vecteurs V tels que $AV = 2V$ et $AV = 3V$.