

Plaquette 2 - Structure du produit : commutation, trace, transposée

Calcul matriciel — Licence 1 (L1)

Exercices

Méthode

Le produit matriciel est **associatif** et **distributif**, mais **pas commutatif** et il a des **diviseurs de zéro**. On apprend à manipuler ces règles : chercher les matrices qui commutent avec une matrice donnée, utiliser la **trace** ($\text{tr}(AB) = \text{tr}(BA)$) pour prouver des impossibilités, la **transposée** $((AB)^T = B^T A^T)$ pour les symétries, les **matrices élémentaires** E_{ij} pour calculer coefficient par coefficient, et le **calcul par blocs**.

Exercice 1 - Matrices qui commutent avec une matrice donnée

- Avec $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, calculer AB et BA .
- Déterminer toutes les matrices $M \in M_2(\mathbb{R})$ qui commutent avec $J = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.
- Montrer que cet ensemble est stable par somme et par produit.
- Calculer $(J + M)^2$ pour M de b), en utilisant le binôme.

Exercice 2 - Commutant d'une matrice diagonale

Soit $D = \text{diag}(1, 2, 3)$.

- Calculer $(DM)_{ij}$ et $(MD)_{ij}$ pour $M = (m_{ij}) \in M_3(\mathbb{R})$.
- En déduire les matrices qui commutent avec D .
- Même question avec $D' = \text{diag}(1, 1, 3)$.
- Qu'est-ce qui explique la différence entre b) et c) ?

Exercice 3 - Trace et crochet $AB - BA$

- Démontrer que $\text{tr}(AB) = \text{tr}(BA)$ pour $A \in M_{n,p}$ et $B \in M_{p,n}$.
- En déduire qu'il n'existe pas de matrices $A, B \in M_n(\mathbb{R})$ telles que $AB - BA = I_n$.
- A-t-on $\text{tr}(ABC) = \text{tr}(BAC)$ en général ? Tester avec des matrices 2×2 simples.
- Montrer que si P est inversible, $\text{tr}(P^{-1}AP) = \text{tr}(A)$.

Exercice 4 - Transposée et forme quadratique

- Démontrer que $(AB)^T = B^T A^T$.
- Montrer que pour toute matrice $A \in M_{n,p}$, $A^T A$ est symétrique et que $\text{tr}(A^T A) = \sum_{i,j} a_{ij}^2$.
- En déduire que $A^T A = 0 \Rightarrow A = 0$.
- Montrer que pour tout vecteur colonne X , $X^T A^T A X \geq 0$, et que $A^T A X = 0 \Rightarrow A X = 0$.

Exercice 5 - Partie symétrique et antisymétrique

a) Montrer que toute matrice carrée M s'écrit $M = S + T$ avec S symétrique et T antisymétrique, et que cette écriture est **unique**.

b) Décomposer $M = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 3 & 1 & 4 \\ 0 & 5 & 2 \end{pmatrix}$.

c) Montrer que la diagonale d'une matrice antisymétrique réelle est nulle.

d) Pour X colonne, montrer que $X^T T X = 0$ si T est antisymétrique, et en déduire $X^T M X = X^T S X$.

Exercice 6 - Matrices élémentaires et centre

On note $E_{ij} \in M_n(\mathbb{R})$ la matrice dont le seul coefficient non nul vaut 1 en position (i, j) .

a) Démontrer que $E_{ij}E_{kl} = \delta_{jk}E_{il}$.

b) Pour M quelconque, décrire $E_{ij}M$ et ME_{ij} .

c) Montrer que si M commute avec **toutes** les matrices, alors M est scalaire : $M = \lambda I_n$.

d) Vérifier avec $n = 2$ que $E_{12}E_{21} = E_{11}$ et $E_{21}E_{12} = E_{22}$.

Exercice 7 - Calcul par blocs

Soit $M = \begin{pmatrix} A & B \\ 0 & D \end{pmatrix}$ où $A \in M_p$, $D \in M_q$, $B \in M_{p,q}$.

a) Calculer M^2 par blocs.

b) Montrer que si A et D sont inversibles, M l'est, avec $M^{-1} = \begin{pmatrix} A^{-1} & -A^{-1}BD^{-1} \\ 0 & D^{-1} \end{pmatrix}$.

c) Application : inverser $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

d) Pourquoi l'ordre des facteurs dans $A^{-1}BD^{-1}$ est-il imposé ?

Exercice 8 - Projecteurs

Une matrice P est un **projecteur** si $P^2 = P$.

a) Vérifier que $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ est un projecteur.

b) Montrer que si P est un projecteur, $I - P$ aussi, et que $P(I - P) = 0$.

c) Pour P de a), déterminer $\ker P$ et l'ensemble $\{X : PX = X\}$. Interpréter géométriquement.

d) Montrer qu'un projecteur autre que I n'est pas inversible.

Exercice 9 - Symétries et projecteurs associés

Une matrice S est une **symétrie** si $S^2 = I$.

- Vérifier que $S = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ est une symétrie et décrire son action.
- Montrer que $P = \frac{I+S}{2}$ est un projecteur et que $S = 2P - I$.
- Calculer P pour la symétrie de a) et interpréter.
- Montrer que S est inversible et donner S^{-1} .

Exercice 10 - Matrices de rotation

Pour $\theta \in \mathbb{R}$, on pose $R(\theta) = \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}$.

- Montrer que $R(\theta)R(\varphi) = R(\theta + \varphi)$.
- En déduire que les rotations commutent, que $R(\theta)^{-1} = R(-\theta)$ et que $R(\theta)^n = R(n\theta)$.
- Vérifier que $R(\theta)^T = R(\theta)^{-1}$.
- Calculer $R\left(\frac{\pi}{6}\right)^{12}$ et $R\left(\frac{\pi}{3}\right)^{2026}$.

Exercice 11 - Produit de matrices symétriques

- Montrer que si A et B sont symétriques, AB est symétrique si et seulement si $AB = BA$.
- Vérifier avec $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$.
- Montrer que pour toute matrice A , AA^T et $A^T A$ sont symétriques, et donner un exemple où elles sont différentes.
- Montrer que si A est symétrique inversible, A^{-1} est symétrique.

Exercice 12 - Matrices qui anticommulent

Soient $\sigma_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ et $\sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ (matrices de Pauli).

- Calculer σ_1^2 , σ_3^2 , $\sigma_1\sigma_3$ et $\sigma_3\sigma_1$.
- Montrer que $\sigma_1\sigma_3 = -\sigma_3\sigma_1$ (elles **anticommulent**).
- En déduire $(\sigma_1 + \sigma_3)^2$ sans calculer la somme.
- Soit $\sigma_2 = i\sigma_1\sigma_3$ (à coefficients complexes). Calculer σ_2 et σ_2^2 .

Exercice 13 - Équation $X^2 = 0$

On cherche les matrices $X \in M_2(\mathbb{R})$ telles que $X^2 = 0$.

- Avec $X = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, écrire les équations.
- Montrer que $d = -a$ (sauf si $X = 0$) et que $a^2 + bc = 0$.

- c) Donner trois exemples non nuls et vérifier l'un d'eux.
- d) Comparer avec l'équation $x^2 = 0$ dans $\mathbb{R}$.

Exercice 14 - Trace d'un projecteur de rang 1

Soient U et V deux vecteurs colonnes de $\mathbb{R}^n$ avec $V^T U = 1$, et $P = UV^T$.

- a) Montrer que $P^2 = P$.
- b) Calculer $\text{tr}P$ et le rang de P .
- c) Exemple : $U = (1, 2, 0)^T$, $V = (1, 0, 3)^T$. Vérifier $V^T U = 1$, écrire P et vérifier $P^2 = P$ sur un coefficient.
- d) Décrire géométriquement l'action de P sur un vecteur X .

Exercice 15 - Synthèse : puissances d'une matrice de rang 1

Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 6 \\ 3 & 6 & 9 \end{pmatrix}$.

- a) Écrire $A = UU^T$ avec U colonne, et calculer $U^T U$.
- b) En déduire $A^2 = 14A$, puis A^n pour tout $n \geq 1$.
- c) Calculer $\text{tr}A$ et comparer avec le facteur 14.
- d) Montrer que $I_3 + A$ est inversible et que son inverse est de la forme $I_3 + \alpha A$; déterminer α .