

Calcul matriciel

Licence 1 - Fiche de révision

1. Formats et opérations $A = (a_{ij}) \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$: n lignes, p colonnes.

$$(A+B)_{ij} = a_{ij} + b_{ij}, \quad (\lambda A)_{ij} = \lambda a_{ij}.$$

Égalité : même format et mêmes coefficients.

2. Produit matricielSi $A \in \mathcal{M}_{n,p}$ et $B \in \mathcal{M}_{p,q}$:

$$AB \in \mathcal{M}_{n,q},$$

$$(AB)_{ij} = \sum_{k=1}^p a_{ik} b_{kj}.$$

Mémo : **ligne** $\times$ **colonne**. Les dimensions intérieures doivent coïncider.**3. Propriétés du produit**

$$A(BC) = (AB)C,$$

$$A(B+C) = AB + AC, \quad (A+B)C = AC + BC.$$

En général :

$$AB \neq BA.$$

 AB peut même exister sans que BA existe.**4. Carré d'une somme**

Toujours :

$$(A+B)^2 = A^2 + AB + BA + B^2.$$

Si $AB = BA$ seulement :

$$(A+B)^2 = A^2 + 2AB + B^2.$$

Donc $(AB)^2 = ABAB$, pas A^2B^2 en général.**5. Identité, puissances, binôme**Pour $A \in \mathcal{M}_n$:

$$I_n A = A I_n = A, \quad A^0 = I_n, \quad A^p A^q = A^{p+q}.$$

Si $AB = BA$:

$$(A+B)^m = \sum_{k=0}^m \binom{m}{k} A^k B^{m-k}.$$

Si $N^2 = 0$: $(I+N)^m = I + mN$.**6. Matrices particulières**Diagonale : $a_{ij} = 0$ si $i \neq j$.Triangulaire sup. : $a_{ij} = 0$ si $i > j$.Symétrique : ${}^t A = A$.Scalaire : $A = \lambda I_n$.Diagonale $D = \text{diag}(d_i)$ inversible $\iff d_i \neq 0$ pour tout i .**7. Transposée**

$$({}^t A)_{ij} = a_{ji}, \quad {}^t({}^t A) = A.$$

$${}^t(A+B) = {}^t A + {}^t B,$$

$${}^t(AB) = {}^t B {}^t A.$$

L'ordre s'inverse.

8. Inversibilité $A \in \mathcal{M}_n$ est inversible si

$$AA^{-1} = A^{-1}A = I_n.$$

$$A \text{ inversible} \iff \text{rg}(A) = n$$

$$\iff AX = 0 \text{ n'a que } X = 0.$$

Alors $AX = B$ a une unique solution pour tout B .**9. Formules d'inverse**Si A, B inversibles :

$$(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1},$$

$$({}^t A)^{-1} = {}^t(A^{-1}).$$

L'ordre est renversé dans l'inverse d'un produit.

Pivot, rang et méthodes

10. Inverse par Gauss-Jordan

Former

$$[A \mid I_n].$$

Réduire le bloc gauche :

$$[A \mid I_n] \sim [I_n \mid A^{-1}].$$

Si I_n est impossible à obtenir, A n'est pas inversible.

11. Matrices élémentaires

Une matrice élémentaire E est obtenue à partir de I_n par une opération de ligne.

EA = même opération de ligne appliquée à A .

Toute matrice élémentaire est inversible ; son inverse réalise l'opération inverse.

12. Rang

$$\text{rg}(A) = \text{nombre de pivots après échelonnement.}$$

Pour $A \in \mathcal{M}_{n,p}$:

$$0 \leq \text{rg}(A) \leq \min(n, p).$$

Les opérations élémentaires sur les lignes conservent le rang.

13. Propriétés du rang

$$\text{rg}({}^tA) = \text{rg}(A)$$

$$\text{rg}(AB) \leq \min(\text{rg } A, \text{rg } B)$$

Si P, Q inversibles :

$$\text{rg}(PAQ) = \text{rg}(A).$$

Pour $A \in \mathcal{M}_n$, $\text{rg}(A) = n \iff A$ inversible.

14. Simplification matricielle

Si A est inversible :

$$AB = AC \implies B = C$$

(en multipliant à gauche par A^{-1}).

Sans inversibilité, c'est faux. De même,

$$AB = 0 \not\Rightarrow A = 0 \text{ ou } B = 0.$$

15. Résoudre $AX = B$

Si $A \in \mathcal{M}_n$ est inversible :

$$X = A^{-1}B.$$

Ne jamais écrire BA^{-1} : on multiplie du côté où se trouve A .

16. Forme normale du rang

Si $\text{rg}(A) = r$, il existe P, Q inversibles tels que

$$PAQ = \begin{pmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Le rang compte le nombre de directions indépendantes portées par la matrice.

17. Exemple express : produit

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}.$$

Alors

$$AB = \begin{pmatrix} 5 & 8 \\ -1 & -4 \end{pmatrix}, \quad BA = \begin{pmatrix} 3 & 6 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}.$$

Donc $AB \neq BA$.

18. Exemple express : inverse

Pour

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 5 \end{pmatrix},$$

Gauss-Jordan donne

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} -5 & 2 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}.$$

Toujours vérifier $AA^{-1} = I_2$.

19. Pièges classiques

- $(AB)^2 = A^2B^2$ sans commutation ;
- $(AB)^{-1} = A^{-1}B^{-1}$;
- ${}^t(AB) = {}^tA {}^tB$;
- simplifier $AB = AC$ sans A inversible ;
- chercher l'inverse d'une matrice non carrée ;
- croire qu'une ligne nulle diminue la cohérence : elle diminue seulement le rang.

20. Checklist examen

1. Dimensions compatibles ?
2. Ordre des facteurs respecté ?
3. Commutation réellement démontrée ?
4. Matrice carrée avant de parler d'inverse ?
5. Pour simplifier : facteur inversible ?
6. Pour le rang : échelonner et compter les pivots.