

Calcul matriciel

Licence 1 (L1) - Cours complet

Opérations, produit, transposée, inversibilité, pivot de Gauss et rang

Idée directrice. Une matrice est un tableau de scalaires qui encode des systèmes, des applications linéaires et des changements de base. Le calcul matriciel ressemble au calcul algébrique ordinaire, mais avec une différence fondamentale : **le produit de matrices n'est en général pas commutatif**. Cette seule remarque explique une grande partie des précautions du chapitre.

1. Matrices : vocabulaire et égalité

Définition

Soient $n, p \geq 1$. Une **matrice à n lignes et p colonnes** à coefficients dans un corps $\mathbb{K}$ (souvent $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$) est un tableau

$$A = (a_{ij})_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq p}} \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K}).$$

Le coefficient a_{ij} se trouve à l'intersection de la ligne i et de la colonne j .

Deux matrices $A = (a_{ij})$ et $B = (b_{ij})$ sont égales si et seulement si elles ont le même format et

$$\forall i, j, \quad a_{ij} = b_{ij}.$$

Une matrice de format $n \times n$ est dite **carrée d'ordre n** . On note $\mathcal{M}_n(\mathbb{K}) = \mathcal{M}_{n,n}(\mathbb{K})$.

Exemple

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 3 & 4 & 5 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{2,3}(\mathbb{R})$$

a deux lignes, trois colonnes et $a_{23} = 5$.

2. Addition et multiplication par un scalaire

Si $A = (a_{ij})$ et $B = (b_{ij})$ appartiennent à $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$, alors

$$A + B = (a_{ij} + b_{ij}), \quad \lambda A = (\lambda a_{ij}) \quad (\lambda \in \mathbb{K}).$$

Ces opérations sont effectuées **coefficient par coefficient**.

La matrice nulle $0_{n,p}$ est l'élément neutre pour l'addition. On a notamment

$$A + B = B + A, \quad (A + B) + C = A + (B + C), \quad \lambda(A + B) = \lambda A + \lambda B.$$

Ainsi $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ est un espace vectoriel sur $\mathbb{K}$.

3. Produit matriciel

Définition

Soient

$$A = (a_{ik}) \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K}), \quad B = (b_{kj}) \in \mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{K}).$$

Le produit AB est la matrice de $\mathcal{M}_{n,q}(\mathbb{K})$ définie par

$$(AB)_{ij} = \sum_{k=1}^p a_{ik} b_{kj}.$$

Autrement dit, le coefficient (i, j) est le produit scalaire formel de la ligne i de A par la colonne j de B .

Vérifier d'abord les dimensions

Le produit

$$(n \times p)(p \times q)$$

est défini et donne une matrice $n \times q$. Les deux dimensions *intérieures* doivent coïncider ; les dimensions *extérieures* donnent le format du résultat.

Exemple

Avec

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 3 & 4 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 0 \\ 3 & 2 \end{pmatrix},$$

on a $A \in \mathcal{M}_{2,3}$, $B \in \mathcal{M}_{3,2}$ et

$$AB = \begin{pmatrix} 1 \cdot 2 + 2(-1) + (-1)3 & 1 \cdot 1 + 2 \cdot 0 + (-1)2 \\ 0 \cdot 2 + 3(-1) + 4 \cdot 3 & 0 \cdot 1 + 3 \cdot 0 + 4 \cdot 2 \end{pmatrix} = \boxed{\begin{pmatrix} -3 & -1 \\ 9 & 8 \end{pmatrix}}.$$

Le produit matriciel vérifie

$$A(BC) = (AB)C, \quad A(B+C) = AB + AC, \quad (A+B)C = AC + BC,$$

mais en général

$$\boxed{AB \neq BA.}$$

Il peut même arriver que AB soit défini et que BA ne le soit pas.**Piège classique**

On ne peut pas transposer sans précaution les réflexes de l'algèbre réelle aux matrices. Par exemple, en général

$$(A+B)^2 = A^2 + AB + BA + B^2,$$

et non $A^2 + 2AB + B^2$.**4. Matrice identité et matrices particulières**Dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, la **matrice identité**

$$I_n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

vérifie

$$I_n A = A, \quad A I_n = A$$

chaque fois que les produits sont définis.

On rencontre fréquemment :

- les matrices **diagonales** : $a_{ij} = 0$ si $i \neq j$;
- les matrices **triangulaires supérieures** : $a_{ij} = 0$ si $i > j$;
- les matrices **triangulaires inférieures** : $a_{ij} = 0$ si $i < j$;
- les matrices **scalaires** : $A = \lambda I_n$;
- les matrices **symétriques** : ${}^t A = A$.

Le produit de deux matrices triangulaires supérieures d'ordre n est triangulaire supérieure ; de même pour les matrices triangulaires inférieures.

5. Transposée

Définition

Pour $A = (a_{ij}) \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$, la **transposée** ${}^tA \in \mathcal{M}_{p,n}(\mathbb{K})$ est définie par

$$({}^tA)_{ij} = a_{ji}.$$

Elle s'obtient en échangeant lignes et colonnes.

Les identités fondamentales sont

$${}^t({}^tA) = A, \quad {}^t(A + B) = {}^tA + {}^tB, \quad {}^t(\lambda A) = \lambda {}^tA,$$

et surtout

$${}^t(AB) = {}^tB {}^tA.$$

L'ordre des facteurs est donc inversé.

Exemple

Si

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}, \quad {}^tA = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 5 \\ 3 & 6 \end{pmatrix}.$$

6. Puissances et binôme matriciel

Pour $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, on définit

$$A^0 = I_n, \quad A^{m+1} = A^m A.$$

Comme les puissances sont des produits de la même matrice, on a

$$A^p A^q = A^{p+q}.$$

Formule du binôme sous une hypothèse de commutation

Si $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ et $AB = BA$, alors pour tout $m \in \mathbb{N}$,

$$(A + B)^m = \sum_{k=0}^m \binom{m}{k} A^k B^{m-k}.$$

Sans l'hypothèse $AB = BA$, cette formule est en général fausse.

Puissance d'une matrice $I + N$

Si $N^2 = 0$, alors I_n commute avec N et, pour $m \geq 0$,

$$(I_n + N)^m = I_n + mN.$$

Les termes d'ordre ≥ 2 disparaissent car $N^2 = 0$.

7. Matrices inversibles

Définition

Une matrice carrée $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est **inversible** s'il existe $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ telle que

$$AB = BA = I_n.$$

Cette matrice B est unique et se note A^{-1} .

Caractérisations de l'inversibilité

Pour $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, les assertions suivantes sont équivalentes :

- A est inversible ;
- le système $AX = 0$ n'a que la solution $X = 0$;
- pour tout $B \in \mathbb{K}^n$, le système $AX = B$ possède une unique solution ;
- $\text{rg}(A) = n$;
- la forme échelonnée réduite de A est I_n .

Lorsque le déterminant a déjà été introduit, elles sont aussi équivalentes à $\det(A) \neq 0$.

On a immédiatement

$$AA^{-1} = A^{-1}A = I_n, \quad (A^{-1})^{-1} = A, \quad (I_n)^{-1} = I_n.$$

Inverse d'un produit

Si A et B sont inversibles, alors AB est inversible et

$$(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}.$$

En effet,

$$(AB)(B^{-1}A^{-1}) = A(BB^{-1})A^{-1} = I_n.$$

De même,

$$({}^tA)^{-1} = {}^t(A^{-1}).$$

Piège classique

L'ordre est essentiel : en général

$$(AB)^{-1} \neq A^{-1}B^{-1}.$$

On doit **renverser** l'ordre des facteurs.

8. Calcul de l'inverse par Gauss-Jordan

Algorithme

Pour $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$:

1. former la matrice augmentée $[A \mid I_n]$;
2. effectuer des opérations élémentaires sur les lignes afin de transformer le bloc gauche en I_n ;
3. si l'on obtient

$$[A \mid I_n] \sim [I_n \mid B],$$

alors $B = A^{-1}$;

4. si le bloc gauche ne peut pas être réduit à I_n , alors A n'est pas inversible.

Calcul complet d'un inverse

Soit

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 5 \end{pmatrix}.$$

On écrit

$$\left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 3 & 5 & 0 & 1 \end{array} \right).$$

Puis

$$L_2 \leftarrow L_2 - 3L_1 \implies \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -3 & 1 \end{array} \right).$$

Ensuite $L_2 \leftarrow -L_2$, puis $L_1 \leftarrow L_1 - 2L_2$:

$$\left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & -5 & 2 \\ 0 & 1 & 3 & -1 \end{array} \right).$$

Donc

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} -5 & 2 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}.$$

On peut vérifier directement que $AA^{-1} = I_2$.

9. Matrices élémentaires

Définition

Une **matrice élémentaire** est obtenue à partir de I_n en effectuant une seule opération élémentaire sur ses lignes.

Si E est la matrice élémentaire correspondant à une opération de ligne, alors

$$EA$$

est la matrice obtenue en appliquant cette même opération à A .

Les trois types sont :

- échange de deux lignes ;
- multiplication d'une ligne par $\lambda \neq 0$;
- ajout de λ fois une ligne à une autre.

Chaque matrice élémentaire est inversible, et son inverse correspond à l'opération élémentaire inverse.

Théorème

Une matrice carrée A est inversible si et seulement si elle peut s'écrire comme un produit de matrices élémentaires.

10. Rang d'une matrice

Définition

Le **rang** d'une matrice A , noté $\text{rg}(A)$, est le nombre de pivots d'une forme échelonnée de A .

Pour $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$,

$$0 \leq \text{rg}(A) \leq \min(n, p).$$

Les opérations élémentaires sur les lignes ne changent pas le rang.

Propriétés fondamentales du rang

Pour des matrices de dimensions compatibles :

$$\operatorname{rg}({}^tA) = \operatorname{rg}(A),$$

$$\operatorname{rg}(AB) \leq \min(\operatorname{rg}(A), \operatorname{rg}(B)).$$

Si P et Q sont inversibles,

$$\operatorname{rg}(PAQ) = \operatorname{rg}(A).$$

En particulier, multiplier à gauche ou à droite par une matrice inversible conserve le rang.

Exemple

Pour

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 6 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix},$$

on effectue $L_2 \leftarrow L_2 - 2L_1$, ce qui donne une ligne nulle. Les lignes 1 et 3 sont indépendantes dans la forme échelonnée, donc

$$\operatorname{rg}(A) = 2.$$

11. Forme normale par équivalence

Si $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ est de rang r , alors il existe des matrices inversibles

$$P \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}), \quad Q \in \mathcal{M}_p(\mathbb{K})$$

telles que

$$PAQ = \begin{pmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Cette forme montre que le rang mesure le nombre de directions réellement indépendantes transportées par la matrice.

12. Simplification matricielle : quand est-elle permise ?

Dans les nombres réels, $ab = ac$ avec $a \neq 0$ implique $b = c$. Pour les matrices, il faut pouvoir multiplier par un inverse.

Théorème

Si $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est inversible et

$$AB = AC,$$

alors

$$B = C.$$

En effet, on multiplie à gauche par A^{-1} .

Sans inversibilité, la simplification est fausse.

Contre-exemple

Prenons

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Alors $B \neq C$, mais

$$AB = AC = 0.$$

On ne peut donc pas « simplifier par A ».

Piège classique

De même, $AB = 0$ n'implique pas nécessairement $A = 0$ ou $B = 0$. L'anneau des matrices possède des diviseurs de zéro dès que $n \geq 2$.

13. Liens avec les systèmes linéaires

Une matrice $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ représente le système

$$AX = B.$$

Le pivot de Gauss permet simultanément :

- de résoudre le système ;
- de calculer $\text{rg}(A)$;
- de déterminer si une matrice carrée est inversible ;
- de calculer A^{-1} lorsqu'il existe.

Pour $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ inversible,

$$AX = B \iff X = A^{-1}B.$$

Attention : on multiplie par A^{-1} **du bon côté**.

14. Calculs-types à savoir refaire

Produit de matrices

1. vérifier les dimensions ;
2. déterminer le format du résultat ;
3. calculer chaque coefficient par « ligne $\times$ colonne » ;
4. ne jamais supposer que $AB = BA$.

Tester l'inversibilité

Pour $A \in \mathcal{M}_n$:

1. échelonner A ;
2. s'il y a n pivots, A est inversible ;
3. s'il y a moins de n pivots, A ne l'est pas.

Calculer le rang

Échelonner la matrice et compter les pivots. Il est inutile d'aller jusqu'à la forme échelonnée *réduite* si seul le rang est demandé.

15. Pièges classiques

Piège classique

- AB et BA sont en général différents, voire l'un peut être défini sans l'autre.
- $(AB)^2 = ABAB$; on ne peut écrire A^2B^2 que si $AB = BA$.
- $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$, avec inversion de l'ordre.
- ${}^t(AB) = {}^tB {}^tA$, avec inversion de l'ordre.
- $AB = AC$ n'implique $B = C$ que si l'on dispose d'une hypothèse permettant de simplifier, par exemple A inversible.
- Une matrice non carrée n'a pas d'inverse au sens usuel A^{-1} .
- Une ligne nulle après échelonnement n'est pas une contradiction : elle réduit seulement le rang.

16. Exercices corrigés

Exercice 1 - Non-commutativité

Soient

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Calculer AB et BA .

Correction.

$$AB = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad BA = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Ainsi $AB \neq BA$.

Exercice 2 - Puissance avec une matrice nilpotente

On pose

$$N = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad A = I_2 + N.$$

Calculer A^m .

Correction. Comme $N^2 = 0$,

$$A^m = (I_2 + N)^m = I_2 + mN = \boxed{\begin{pmatrix} 1 & m \\ 0 & 1 \end{pmatrix}}.$$

Exercice 3 - Inverse et système

Soit

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 5 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

Résoudre $AX = B$.

Correction. On vérifie par Gauss-Jordan que

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Donc

$$X = A^{-1}B = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5 \\ 3 \end{pmatrix} = \boxed{\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}}.$$

Exercice 4 - Rang

Déterminer le rang de

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 4 & 2 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Correction. Avec

$$L_2 \leftarrow L_2 - 2L_1, \quad L_3 \leftarrow L_3 - L_1,$$

on obtient

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -1 \end{pmatrix}.$$

Il y a deux pivots, donc

$$\boxed{\text{rg}(A) = 2.}$$

17. À retenir

- Le produit AB est défini lorsque le nombre de colonnes de A égale le nombre de lignes de B .
- Le calcul matriciel est associatif et distributif, mais **non commutatif**.
- Pour les produits, transposées et inverses, l'ordre des facteurs est crucial.
- A carrée est inversible si et seulement si $\text{rg}(A) = n$.
- L'inverse se calcule par $[A \mid I_n] \sim [I_n \mid A^{-1}]$.
- Le rang est le nombre de pivots après échelonnement et il est invariant par opérations élémentaires.
- Une simplification matricielle n'est légitime que si le facteur que l'on veut annuler est inversible (ou sous une hypothèse équivalente adaptée).