

**Plaquette 1 – Combinatoire, conditionnement,
variables aléatoires et espérance**
Dénombrement et probabilités — Licence 1 (L1)
Corrections détaillées

Boîte à outils

Dénombrement (ensemble à n éléments).

Situation	Ordre	Répétition	Nombre
p -liste	oui	oui	n^p
Arrangement	oui	non	$\frac{n!}{(n-p)!}$
Permutation	oui	non	$n!$
Combinaison	non	non	$\binom{n}{p} = \frac{n!}{p!(n-p)!}$

- **Crible** : $|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|$; **complémentaire** pour les « au moins un ».
- **Pascal** : $\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k}$; **binôme** : $(a+b)^n = \sum_k \binom{n}{k} a^k b^{n-k}$.

Probabilités.

- **Équiprobabilité** : $\mathbb{P}(A) = \frac{|A|}{|\Omega|}$.
- **Conditionnelle** : $\mathbb{P}(B | A) = \frac{\mathbb{P}(A \cap B)}{\mathbb{P}(A)}$; **composées** : $\mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B | A)$.
- **Probabilités totales** (système complet (A_i)) : $\mathbb{P}(B) = \sum_i \mathbb{P}(A_i)\mathbb{P}(B | A_i)$.
- **Bayes** : $\mathbb{P}(A | B) = \frac{\mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B | A)}{\mathbb{P}(B)}$.
- **Indépendance** : $\mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B)$ — à ne pas confondre avec l'**incompatibilité**.

Variables aléatoires.

$$\mathbb{E}(X) = \sum_k k \mathbb{P}(X = k) \quad V(X) = \mathbb{E}(X^2) - \mathbb{E}(X)^2$$

- **Linéarité** : $\mathbb{E}(aX + bY + c) = a\mathbb{E}(X) + b\mathbb{E}(Y) + c$, **sans** hypothèse d'indépendance.
- $V(aX + b) = a^2V(X)$; si X et Y sont indépendantes, $V(X + Y) = V(X) + V(Y)$.
- **Lois usuelles** : Bernoulli $B(p)$ (p ; pq) · binomiale $B(n, p)$ (np ; npq) · uniforme sur $\llbracket 1, n \rrbracket$ ($\frac{n+1}{2}$; $\frac{n^2-1}{12}$) · géométrique $G(p)$ ($\frac{1}{p}$; $\frac{q}{p^2}$).

Correction de l'exercice 1 – Dénombrement de base

- a) Les postes sont **distincts** : l'ordre compte, sans répétition — c'est un **arrangement**.

$$A_{25}^3 = 25 \times 24 \times 23 = 13\,800$$

- b) Une commission est un **ensemble** : l'ordre ne compte pas — c'est une **combinaison**.

$$\binom{25}{3} = \frac{25 \times 24 \times 23}{6} = 2\,300$$

- **Rapport** : $\frac{13800}{2300} = 6 = 3! \checkmark$ — chaque commission correspond à $3! = 6$ répartitions de postes.
- **Réflexe de reconnaissance** : « postes nommés » → arrangement ; « groupe, comité, main de cartes » → combinaison.

Réponse. a) 13 800 · b) 2 300.

Correction de l'exercice 2 - Passage par le complémentaire

- **Complémentaire** : « aucun six » signifie que les quatre dés donnent un résultat parmi 5.
- $\mathbb{P}(\text{aucun six}) = \left(\frac{5}{6}\right)^4 = \frac{625}{1296} \approx 0,4823$.
- **Probabilité cherchée** :

$$\mathbb{P}(\text{au moins un}) = 1 - \frac{625}{1296} = \frac{671}{1296} \approx 0,5177$$
- **Contrôle** : la valeur est légèrement supérieure à $\frac{1}{2}$ — cohérent avec le célèbre **problème du chevalier de Méré** (parier sur au moins un six en 4 lancers est légèrement favorable).
- **Erreur classique** : répondre $4 \times \frac{1}{6} = \frac{2}{3}$ — cela **surcompte** les cas à plusieurs six.
- **Règle d'or** : « au moins un » appelle presque toujours le **complémentaire**.

Réponse. $1 - \left(\frac{5}{6}\right)^4 = \frac{671}{1296} \approx 0,518$.

Correction de l'exercice 3 - Probabilités conditionnelles

a) **Probabilités composées** :

$$\mathbb{P}(B_1 \cap B_2) = \frac{4}{10} \times \frac{3}{9} = \frac{12}{90} = \frac{2}{15} \approx 0,1333$$

b) **Probabilités totales** selon la couleur de la première :

$$\mathbb{P}(B_2) = \frac{4}{10} \times \frac{3}{9} + \frac{6}{10} \times \frac{4}{9} = \frac{12 + 24}{90} = \frac{36}{90} = \frac{2}{5}$$

- **Résultat remarquable** : $\mathbb{P}(B_2) = \frac{2}{5} = \mathbb{P}(B_1)$ — la probabilité ne dépend **pas du rang** du tirage !
- **Explication** : par **symétrie**, toutes les positions sont équivalentes avant que l'on n'observe quoi que ce soit.

- **Contrôle de a) par dénombrement** : $\frac{\binom{4}{2}}{\binom{10}{2}} = \frac{6}{45} = \frac{2}{15} \checkmark$

Réponse. a) $\frac{2}{15}$ · b) $\frac{2}{5}$.

Correction de l'exercice 4 - Formule de Bayes

— **Probabilités totales** :

$$\mathbb{P}(D) = 0,70 \times 0,03 + 0,30 \times 0,08 = 0,021 + 0,024 = 0,045$$

— **Bayes** :

$$\mathbb{P}(B | D) = \frac{0,024}{0,045} = \frac{24}{45} = \frac{8}{15} \approx 0,5333$$

- **Conclusion** : environ 53 % des ampoules défectueuses viennent de B.
- **Contrôle** : $\mathbb{P}(A | D) = \frac{21}{45} \approx 0,467$, et la somme vaut 1 ✓
- **Renversement instructif** : B ne produit que 30 % des ampoules, mais fournit la **majorité** des défectueuses — son taux de défaut est presque trois fois plus élevé.
- **Erreur à éviter** : confondre $\mathbb{P}(D | B) = 8 \%$ et $\mathbb{P}(B | D) = 53 \%$ — ce sont des quantités radicalement différentes.

Réponse. $\mathbb{P}(B | D) = \frac{8}{15} \approx 0,533$.

Correction de l'exercice 5 - Test de dépistage

- **Données** : $\mathbb{P}(M) = 0,02$, $\mathbb{P}(T | M) = 0,95$, $\mathbb{P}(T | \overline{M}) = 0,05$.
- **Probabilités totales** :

$$\mathbb{P}(T) = 0,02 \times 0,95 + 0,98 \times 0,05 = 0,019 + 0,049 = 0,068$$
- **Bayes** :

$$\mathbb{P}(M | T) = \frac{0,019}{0,068} \approx 0,2794$$
- **Conclusion** : seulement **28 %** des personnes testées positives sont réellement malades.
- **Pourquoi ce résultat surprenant ?** Les 98 % de gens sains génèrent 4,9 % de faux positifs, soit **2,6 fois plus** que les 1,9 % de vrais positifs.
- **Leçon de santé publique** : un test performant reste peu concluant sur une maladie **rare** — d'où la nécessité de tests de confirmation.
- **Contrôle** : $\mathbb{P}(\overline{M} | T) \approx 0,721$, et la somme vaut 1 ✓

Réponse. Environ 27,9 %.

Correction de l'exercice 6 - Indépendance

- $\mathbb{P}(R) = \frac{4}{32} = \frac{1}{8}$ (quatre rois).
- $\mathbb{P}(C) = \frac{8}{32} = \frac{1}{4}$ (huit cœurs).
- $\mathbb{P}(R \cap C) = \frac{1}{32}$ (le roi de cœur).
- **Test** : $\mathbb{P}(R)\mathbb{P}(C) = \frac{1}{8} \times \frac{1}{4} = \frac{1}{32}$ ✓ — **égalité**.
- **Conclusion** : les deux événements sont **indépendants**.
- **Interprétation** : connaître la couleur ne renseigne pas sur la hauteur — les deux « dimensions » de la carte sont séparées.
- **Contre-exemple avec un jeu tronqué** : si l'on retirait le roi de cœur, on aurait $\mathbb{P}(R \cap C) = 0$ alors que $\mathbb{P}(R)\mathbb{P}(C) > 0$ — l'indépendance serait **détruite**.
- **Distinction essentielle** : deux événements **incompatibles** de probabilités non nulles ne sont **jamais** indépendants.

Réponse. Oui : $\frac{1}{32} = \frac{1}{8} \times \frac{1}{4}$.

Correction de l'exercice 7 - Loi binomiale

- a) Les questions sont des épreuves **identiques indépendantes** de probabilité $p = \frac{1}{3}$.

— $X \sim B\left(8; \frac{1}{3}\right)$, avec $\mathbb{E}(X) = \frac{8}{3} \approx 2,667$ et $V(X) = 8 \times \frac{1}{3} \times \frac{2}{3} = \frac{16}{9} \approx 1,778$.

— **Écart type** : $\sigma \approx 1,333$.

b) **Complémentaire** : on calcule $\mathbb{P}(X \leq 3)$.

— $\mathbb{P}(X = k) = \binom{8}{k} \left(\frac{1}{3}\right)^k \left(\frac{2}{3}\right)^{8-k}$; les valeurs sont 0,0390, 0,1561, 0,2731, 0,2731 pour $k = 0, 1, 2, 3$.

— Somme : 0,7413, donc $\mathbb{P}(X \geq 4) \approx 0,2587$.

— **Contrôle** : la moyenne est 2,67, donc obtenir 4 ou plus est **au-dessus** de la moyenne
— une probabilité de 26 % est plausible ✓

— **Conclusion pratique** : répondre au hasard donne rarement la moyenne (il faudrait $X \geq 4$).

Réponse. a) $B(8; \frac{1}{3})$, $\mathbb{E} = \frac{8}{3}$, $V = \frac{16}{9}$ · b) $\approx 0,259$.

Correction de l'exercice 8 - Espérance et variance

— **Espérance** : $-1 \times 0,3 + 0 + 2 \times 0,5 = -0,3 + 1 = 0,7$.

— **Moment d'ordre 2** : $1 \times 0,3 + 0 + 4 \times 0,5 = 0,3 + 2 = 2,3$.

— **Variance** (König-Huygens) : $2,3 - 0,49 = 1,81$.

— **Écart type** : $\sigma = \sqrt{1,81} \approx 1,345$.

— **Transformation affine** : $\mathbb{E}(3X - 1) = 3 \times 0,7 - 1 = 1,1$.

— **Contrôle de la variance par la définition** :

$$0,3(-1,7)^2 + 0,2(-0,7)^2 + 0,5(1,3)^2 = 0,867 + 0,098 + 0,845 = 1,81 \quad \checkmark$$

— **Remarque** : $V(3X - 1) = 9 \times 1,81 = 16,29$ — la variance est **quadratique** en le coefficient et **insensible** à la translation.

Réponse. $\mathbb{E}(X) = 0,7$; $V(X) = 1,81$; $\mathbb{E}(3X - 1) = 1,1$.

Correction de l'exercice 9 - Espérance de gain

— **Probabilité de gagner** : la somme 7 s'obtient de 6 façons sur 36, soit $\frac{1}{6}$.

— **Gain net** : $G = 8$ € avec probabilité $\frac{1}{6}$, et $G = -2$ € avec probabilité $\frac{5}{6}$.

— **Espérance** :

$$\mathbb{E}(G) = \frac{8}{6} - \frac{10}{6} = -\frac{2}{6} = -\frac{1}{3} \approx -0,333 \text{ €}$$

— **Conclusion** : le jeu est **défavorable** — on perd en moyenne 33 centimes par partie.

— **Sur 100 parties** : perte moyenne d'environ 33 €.

— **Mise équitable** : pour que le jeu soit **équitable** ($\mathbb{E} = 0$), il faudrait une mise de $\frac{10}{6} \approx 1,67$ €.

— **Écart type** : $\mathbb{E}(G^2) = \frac{64}{6} + \frac{4 \times 5}{6} = \frac{84}{6} = 14$, donc $V(G) = 14 - \frac{1}{9} \approx 13,89$ et $\sigma \approx 3,73$ €
— les **fluctuations** dominent largement la perte moyenne, ce qui entretient l'illusion du joueur.

Réponse. Non : $\mathbb{E}(G) = -\frac{1}{3}$ € par partie.

Correction de l'exercice 10 - Loi uniforme

- **Espérance** : $\frac{n+1}{2} = \frac{11}{2} = 5,5$.
 - **Variance** : $\frac{n^2-1}{12} = \frac{99}{12} = 8,25$, donc $\sigma \approx 2,872$.
 - **Probabilité** : $X > 7$ correspond à $\{8, 9, 10\}$, soit

$$\mathbb{P}(X > 7) = \frac{3}{10} = 0,3$$
 - **Contrôle de l'espérance** : $\frac{1+2+\dots+10}{10} = \frac{55}{10} = 5,5 \checkmark$
 - **Contrôle de la variance** : $\mathbb{E}(X^2) = \frac{1+4+\dots+100}{10} = \frac{385}{10} = 38,5$, et $38,5 - 30,25 = 8,25 \checkmark$
 - **Symétrie** : la loi est symétrique autour de 5,5, d'où $\mathbb{P}(X \leq 3) = \mathbb{P}(X \geq 8) = 0,3 \checkmark$
- Réponse.** $\mathbb{E} = 5,5$; $V = 8,25$; $\mathbb{P}(X > 7) = 0,3$.

Correction de l'exercice 11 - Anagrammes et dénombrement

- **Décompte des lettres** : S(2), T(3), A(1), I(2), Q(1), U(1), E(1) — total 11 $\checkmark$
 - **Formule des anagrammes** :

$$\frac{11!}{2! \times 3! \times 2!} = \frac{39\,916\,800}{2 \times 6 \times 2} = \frac{39\,916\,800}{24} = 1\,663\,200$$
 - **Justification** : si toutes les lettres étaient distinctes, il y aurait 11! mots ; chaque anagramme réel est compté $2! \times 3! \times 2!$ fois (permutations internes des lettres identiques).
 - **Contrôle de plausibilité** : 1,66 million, bien inférieur à $11! \approx 39,9$ millions $\checkmark$ — le facteur de réduction est 24.
 - **Cas particulier utile** : si toutes les lettres étaient distinctes (comme dans « MATHS »), on aurait simplement $n!$.
 - **Formule générale** : $\frac{n!}{n_1!n_2!\dots}$ où les n_i sont les multiplicités.
- Réponse.** $\frac{11!}{2!3!2!} = 1\,663\,200$ anagrammes.

Correction de l'exercice 12 - Somme de variables indépendantes

- **Stabilité de la binomiale** : deux binomiales indépendantes de **même paramètre** p s'additionnent.

$$X + Y \sim B(25; 0,4)$$
 - **Justification** : X compte les succès de 10 épreuves, Y ceux de 15 autres épreuves indépendantes — au total 25 épreuves identiques indépendantes.
 - **Espérance** : $25 \times 0,4 = 10$. **Contrôle par linéarité** : $4 + 6 = 10 \checkmark$
 - **Variance** : $25 \times 0,4 \times 0,6 = 6$. **Contrôle par indépendance** : $2,4 + 3,6 = 6 \checkmark$
 - **Écart type** : $\sqrt{6} \approx 2,449$.
 - **Condition essentielle** : si les paramètres p différaient, la somme ne serait **pas** binomiale (bien que l'espérance reste additive).
- Réponse.** $X + Y \sim B(25; 0,4)$, $\mathbb{E} = 10$, $V = 6$.

Correction de l'exercice 13 - Le problème des anniversaires

a) Ω = suites de n dates, $|\Omega| = 365^n$. Les suites à dates distinctes sont des **arrangements** : $365 \times 364 \times \cdots \times (365 - n + 1)$. D'où

$$q_n = \frac{365 \times 364 \times \cdots \times (365 - n + 1)}{365^n} = \prod_{k=0}^{n-1} \left(1 - \frac{k}{365}\right)$$

b) $1 - q_{23} \approx 0,507$: dans un groupe de 23 personnes, il y a **plus d'une chance sur deux** que deux personnes aient le même anniversaire — bien moins que l'intuition ne le suggère (on compare $\binom{23}{2} = 253$ **paires**, pas 23 personnes).

c) $q_n = \prod \left(1 - \frac{k}{365}\right) \leq \prod e^{-k/365} = \exp\left(-\frac{1}{365} \sum_{k=0}^{n-1} k\right) = \exp\left(-\frac{n(n-1)}{730}\right)$.

— Pour $n = 23$: $\frac{23 \times 22}{730} = \frac{506}{730} \approx 0,693 \approx \ln 2$, majorant $\approx 0,500$ ✓ (cohérent avec $q_{23} \approx 0,493$).

d) $1 - q_n$ croît avec n ; $0,891 < 0,9 < 0,903$: il faut $n = 41$ personnes.

Réponse. $1 - q_{23} \approx 0,507$; $q_n \leq e^{-n(n-1)/730}$; 41 personnes pour 90 %.

Correction de l'exercice 14 - Attendre le premier six : loi géométrique

a) $X = k$: $k - 1$ échecs puis un succès, lancers indépendants : $\mathbb{P}(X = k) = \left(\frac{5}{6}\right)^{k-1} \frac{1}{6}$. Série géométrique :

$$\sum_{k \geq 1} \left(\frac{5}{6}\right)^{k-1} \frac{1}{6} = \frac{1}{6} \times \frac{1}{1 - \frac{5}{6}} = 1$$

b) $X > k \Leftrightarrow$ les k premiers lancers ne donnent pas six : $\mathbb{P}(X > k) = \left(\frac{5}{6}\right)^k$. Donc

$\mathbb{P}(X \leq 4) = 1 - \left(\frac{5}{6}\right)^4 = 1 - \frac{625}{1296} \approx 0,518$ (le pari gagnant du chevalier de Méré).

c) $\mathbb{E}(X) = \frac{1}{6} \sum_{k \geq 1} k \left(\frac{5}{6}\right)^{k-1} = \frac{1}{6} \times \frac{1}{(1/6)^2} = 6$: en moyenne six lancers, ce qu'on attendait.

d) $\{X > k + m\} \subset \{X > k\}$, donc

— $\mathbb{P}(X > k + m \mid X > k) = \frac{(5/6)^{k+m}}{(5/6)^k} = \left(\frac{5}{6}\right)^m = \mathbb{P}(X > m)$.

— Avoir déjà raté k fois ne rend pas le six « plus probable » : le dé n'a pas de mémoire.

Réponse. $\mathbb{P}(X = k) = \left(\frac{5}{6}\right)^{k-1} \frac{1}{6}$; $\mathbb{P}(X \leq 4) \approx 0,518$; $\mathbb{E}(X) = 6$; loi sans mémoire.

Correction de l'exercice 15 - Synthèse : problème complet

a) **Modèle hypergéométrique** : $|\Omega| = \binom{8}{3} = 56$.

— $\mathbb{P}(X = k) = \frac{\binom{3}{k} \binom{5}{3-k}}{56}$ pour $k = 0, 1, 2, 3$.

— $\mathbb{P}(X = 0) = \frac{1 \times 10}{56} = \frac{10}{56}$;

— $\mathbb{P}(X = 1) = \frac{3 \times 10}{56} = \frac{30}{56}$;

— $\mathbb{P}(X = 2) = \frac{3 \times 5}{56} = \frac{15}{56}$;

— $\mathbb{P}(X = 3) = \frac{1 \times 1}{56} = \frac{1}{56}$.

— **Contrôle** : $10 + 30 + 15 + 1 = 56$ ✓

b) **Espérance par la définition** :

$$\mathbb{E}(X) = \frac{0 + 30 + 30 + 3}{56} = \frac{63}{56} = \frac{9}{8} = 1,125$$

— **Contrôle par les indicatrices** : $X = A_1 + A_2 + A_3$ où A_i vaut 1 si la i -ième boule tirée est rouge. Par symétrie, $\mathbb{E}(A_i) = \frac{3}{8}$, donc

$$\mathbb{E}(X) = 3 \times \frac{3}{8} = \frac{9}{8} \quad \checkmark$$

— **Élégance de la seconde méthode** : elle évite entièrement le calcul de la loi — c'est la technique à privilégier pour l'espérance.

— **Plausibilité** : sur 3 tirages avec $\frac{3}{8}$ de rouges, on attend un peu plus d'une rouge ✓

Réponse. a) loi hypergéométrique · b) $\mathbb{E}(X) = \frac{9}{8} = 1,125$.