

Plaquette 3 – Conditionnement, Bayes et indépendance

Dénombrement et probabilités — Licence 1 (L1)

Corrections détaillées

Boîte à outils

Probabilités composées : $\mathbb{P}(A_1 \cap \dots \cap A_n) = \mathbb{P}(A_1) \mathbb{P}(A_2 | A_1) \dots \mathbb{P}(A_n | A_1 \cap \dots \cap A_{n-1})$.

— **Probabilités totales** : si (C_i) est un système complet, $\mathbb{P}(B) = \sum_i \mathbb{P}(C_i) \mathbb{P}(B | C_i)$.

— **Bayes** :

$$\mathbb{P}(C_j | B) = \frac{\mathbb{P}(C_j) \mathbb{P}(B | C_j)}{\sum_i \mathbb{P}(C_i) \mathbb{P}(B | C_i)}$$

— **Indépendance mutuelle** de $A_1, \dots, A_n$: $\mathbb{P}\left(\bigcap_{i \in I} A_i\right) = \prod_{i \in I} \mathbb{P}(A_i)$ pour **toute** partie I — plus fort que l'indépendance deux à deux.

— **Suite récurrente** $p_{n+1} = ap_n + b$ ($|a| < 1$) : $p_n = \ell + (p_0 - \ell)a^n$ avec $\ell = \frac{b}{1-a}$.

Correction de l'exercice 1 – Le problème de Monty Hall

a) $\mathbb{P}(O_3 | V_1) = \frac{1}{2}$ (il choisit entre 2 et 3), $\mathbb{P}(O_3 | V_2) = 1$ (obligé), $\mathbb{P}(O_3 | V_3) = 0$.

b) Probabilités totales : $\mathbb{P}(O_3) = \frac{1}{3} \left(\frac{1}{2} + 1 + 0 \right) = \frac{1}{2}$. Bayes :

$$\mathbb{P}(V_2 | O_3) = \frac{\frac{1}{3} \times 1}{\frac{1}{2}} = \frac{2}{3}, \quad \mathbb{P}(V_1 | O_3) = \frac{\frac{1}{3} \times \frac{1}{2}}{\frac{1}{2}} = \frac{1}{3}$$

— Il faut **changer** : on double ses chances.

c) Sur 300 parties, le premier choix est bon environ 100 fois : changer fait alors perdre. Dans les 200 autres, l'animateur est **forcé** de désigner la voiture en laissant l'autre porte fermée : changer fait gagner 200 fois sur 300 ✓

d) Rester : $\frac{1}{4}$. Changer : on gagne si le premier choix était mauvais ($\frac{3}{4}$) **et** si l'on choisit la bonne parmi les 2 fermées restantes ($\frac{1}{2}$) : $\frac{3}{8} > \frac{1}{4}$. Changer reste avantageux.

Réponse. $\mathbb{P}(V_2 | O_3) = \frac{2}{3}$: changer ; avec 4 portes, $\frac{3}{8}$ contre $\frac{1}{4}$.

Correction de l'exercice 2 – Bayes à trois causes

a) Probabilités totales :

$$\mathbb{P}(D) = 0,5 \times 0,01 + 0,3 \times 0,02 + 0,2 \times 0,05 = 0,005 + 0,006 + 0,010 = 0,021.$$

b) Bayes :

$$\mathbb{P}(M_1 | D) = \frac{0,005}{0,021} = \frac{5}{21}, \quad \mathbb{P}(M_2 | D) = \frac{0,006}{0,021} = \frac{2}{7}, \quad \mathbb{P}(M_3 | D) = \frac{0,010}{0,021} = \frac{10}{21}$$

c) $\frac{5+6+10}{21} = 1$ ✓ La machine qui produit **le moins** (M_3) est la plus probable responsable ($\approx 48\%$) : son taux de défauts est 5 fois celui de M_1 .

d) Avec un taux t :

$$\frac{0,2t}{0,011 + 0,2t} < 0,3 \Leftrightarrow 0,2t < 0,0033 + 0,06t \Leftrightarrow 0,14t < 0,0033 \Leftrightarrow t < \frac{0,0033}{0,14} \approx 2,36\%.$$

Réponse. $\mathbb{P}(D) = 0,021$; $\frac{5}{21}$, $\frac{6}{21}$, $\frac{10}{21}$; taux de M_3 inférieur à $\approx 2,36\%$.

Correction de l'exercice 3 - Dépistage : un test, puis deux

a)

$$\mathbb{P}(M | +) = \frac{0,01 \times 0,99}{0,01 \times 0,99 + 0,99 \times 0,02} = \frac{0,0099}{0,0297} = \frac{1}{3}$$

— Malgré un test « fiable à 99 % », deux positifs sur trois sont sains : la maladie est **rare**, les faux positifs sont plus nombreux que les vrais.

b) 100 malades, dont 99 positifs ; 9900 sains, dont 198 positifs. Parmi les 297 positifs, 99 malades : $\frac{99}{297} = \frac{1}{3}$ ✓

c) Nouvel a priori $\frac{1}{3}$:

$$\text{— } \mathbb{P}(M | ++)= \frac{\frac{1}{3} \times 0,99}{\frac{1}{3} \times 0,99 + \frac{2}{3} \times 0,02} = \frac{0,33}{0,3433} \approx 0,961.$$

d) $\frac{0,01 \times 0,99^2}{0,01 \times 0,99^2 + 0,99 \times 0,02^2} = \frac{0,99}{0,99 + 0,04} = \frac{99}{103} \approx 0,961$ ✓ (après simplification par $0,01 \times 0,99$).

Réponse. $\mathbb{P}(M | +) = \frac{1}{3}$; après deux tests positifs : $\frac{99}{103} \approx 0,961$.

Correction de l'exercice 4 - Indépendance deux à deux, pas mutuelle

a) $\Omega = \{PP, PF, FP, FF\}$ équiprobable ; $\mathbb{P}(A) = \mathbb{P}(B) = \frac{1}{2}$, $C = \{PP, FF\}$, $\mathbb{P}(C) = \frac{1}{2}$.

b) $A \cap B = A \cap C = B \cap C = \{PP\}$, de probabilité $\frac{1}{4} = \frac{1}{2} \times \frac{1}{2}$: indépendance deux à deux ✓

c) $A \cap B \cap C = \{PP\}$:

$$\mathbb{P}(A \cap B \cap C) = \frac{1}{4} \neq \frac{1}{8} = \mathbb{P}(A) \mathbb{P}(B) \mathbb{P}(C)$$

— Pas d'indépendance mutuelle.

d) Chaque événement seul ne dit rien sur un autre, mais A et B **ensemble** déterminent C : $\mathbb{P}(C | A \cap B) = 1$. L'indépendance mutuelle exige l'égalité pour **toutes** les sous-familles.

Réponse. Deux à deux indépendants ; $\mathbb{P}(A \cap B \cap C) = \frac{1}{4} \neq \frac{1}{8}$: pas mutuellement indépendants.

Correction de l'exercice 5 - L'urne de Pólya

a) $\mathbb{P}(R_2) = \mathbb{P}(R_1) \mathbb{P}(R_2 | R_1) + \mathbb{P}(B_1) \mathbb{P}(R_2 | B_1) = \frac{1}{2} \times \frac{2}{3} + \frac{1}{2} \times \frac{1}{3} = \frac{1}{2}$.

b) $\mathbb{P}(R_1 | R_2) = \frac{\frac{1}{2} \times \frac{2}{3}}{\frac{1}{2}} = \frac{2}{3}$.

c) Après k rouges, l'urne contient $k + 1$ rouges sur $k + 2$ boules :

$$\mathbb{P}(R_1 \cap \dots \cap R_n) = \frac{1}{2} \times \frac{2}{3} \times \dots \times \frac{n}{n+1} = \frac{1}{n+1}$$

— (produit télescopique ; formule des probabilités composées).

d) $\mathbb{P}(R_1 \cap R_2) = \frac{1}{3} \neq \frac{1}{4} = \mathbb{P}(R_1) \mathbb{P}(R_2)$: **pas** indépendants (le succès « s'auto-renforce »), bien que chaque tirage ait séparément la probabilité $\frac{1}{2}$.

Réponse. $\mathbb{P}(R_2) = \frac{1}{2}$; $\mathbb{P}(R_1 | R_2) = \frac{2}{3}$; $\frac{1}{n+1}$; tirages non indépendants.

Correction de l'exercice 6 - Chaîne à deux états : la météo

a) Probabilités totales (système complet : beau / pluie le jour n) :

$$p_{n+1} = 0,8p_n + 0,4(1 - p_n) = 0,4p_n + 0,4.$$

b) $\ell = 0,4\ell + 0,4$ donne $\ell = \frac{2}{3}$. Alors $p_{n+1} - \ell = 0,4(p_n - \ell)$:

$$p_n = \frac{2}{3} + \left(p_0 - \frac{2}{3}\right)0,4^n$$

c) $0,4^n \rightarrow 0$: $p_n \rightarrow \frac{2}{3}$ quel que soit p_0 (la chaîne « oublie » l'état initial).

d) $\frac{1}{3} \times 0,4^n < 10^{-3} \Leftrightarrow 0,4^n < 0,003 \Leftrightarrow n > \frac{\ln 0,003}{\ln 0,4} \approx 6,34$: dès $n = 7$.

— **Contrôle** : $p_1 = 0,8$ ✓ (donnée) et formule : $\frac{2}{3} + \frac{1}{3} \times 0,4 = 0,8$ ✓

Réponse. $p_n = \frac{2}{3} + (p_0 - \frac{2}{3})0,4^n \rightarrow \frac{2}{3}$; écart $< 10^{-3}$ dès $n = 7$.

Correction de l'exercice 7 - Fiabilité d'un système

a) Indépendance : $0,9^3 = 0,729$.

b) Le système tombe en panne si les trois tombent en panne :

$$1 - 0,1^3 = 0,999$$

c) Bloc parallèle : $1 - 0,1^2 = 0,99$; en série avec A : $0,9 \times 0,99 = 0,891$.

— **Remarque** : le maillon faible (A, seul) limite le système : doubler A aussi donnerait $0,99 \times 0,99 \approx 0,980$.

d) $1 - 0,1^n \geq 1 - 10^{-6} \Leftrightarrow 0,1^n \leq 10^{-6} \Leftrightarrow n \geq 6$.

Réponse. Série 0,729 ; parallèle 0,999 ; mixte 0,891 ; 6 composants en parallèle.

Correction de l'exercice 8 - La ruine du joueur

a) À 0 ou 3, le jeu est fini. Sinon, on conditionne par l'issue de la première partie (probabilités totales) : gagnée, on repart de $k + 1$; perdue, de $k - 1$.

b) $P_1 = \frac{1}{2}P_2$ et $P_2 = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}P_1$: $P_1 = \frac{1}{4} + \frac{1}{4}P_1$, $P_1 = \frac{1}{3}$, $P_2 = \frac{2}{3}$. Soit $P_k = \frac{k}{3}$ (jeu **équitable**).

c) $P_1 = \frac{2}{3}P_2$ et $P_2 = \frac{2}{3} + \frac{1}{3}P_1$:

$$P_1 = \frac{4}{9} + \frac{2}{9}P_1 \Rightarrow P_1 = \frac{4}{7}, \quad P_2 = \frac{2}{3} + \frac{4}{21} = \frac{6}{7}$$

d) $r = \frac{1}{2}$: $P_1 = \frac{1/2}{7/8} = \frac{4}{7}$ ✓ ; $P_2 = \frac{3/4}{7/8} = \frac{6}{7}$ ✓

— Un léger avantage par partie ($\frac{2}{3}$ contre $\frac{1}{2}$) change beaucoup la probabilité finale ($\frac{4}{7}$ contre $\frac{1}{3}$ en partant de 1 euro).

Réponse. $p = \frac{1}{2}$: $P_k = \frac{k}{3}$; $p = \frac{2}{3}$: $P_1 = \frac{4}{7}$, $P_2 = \frac{6}{7}$.

Correction de l'exercice 9 - Les paris du chevalier de Méré

a) Complémentaire, lancers indépendants : $1 - \left(\frac{5}{6}\right)^4 \approx 0,518 > \frac{1}{2}$.

b) Le double six a la probabilité $\frac{1}{36}$:

$$1 - \left(\frac{35}{36}\right)^{24} \approx 0,491 < \frac{1}{2}$$

c) Le raisonnement « $n \times p$ » additionne les probabilités d'événements **non incompatibles** (on peut obtenir deux six) : il surestime, et donnerait $\frac{4}{6} = \frac{24}{36} = \frac{2}{3}$ dans les deux cas. La vraie probabilité $1 - (1 - p)^n$ ne dépend pas seulement du produit np : 0,518 pour $(n, p) = (4, \frac{1}{6})$, 0,491 pour $(24, \frac{1}{36})$.

d) $1 - \left(\frac{35}{36}\right)^n > \frac{1}{2} \Leftrightarrow n > \frac{\ln 2}{\ln 36 - \ln 35} \approx 24,6$: il faut $n = 25$ ($\approx 0,506$).

Réponse. $\approx 0,518$ et $\approx 0,491$; il faut 25 lancers pour que le double six soit favorable.

Correction de l'exercice 10 - Pièce piégée et observations successives

a) T : pièce piégée, $\mathbb{P}(T) = \frac{1}{3}$; $\mathbb{P}(PPP | T) = 1$, $\mathbb{P}(PPP | \bar{T}) = \frac{1}{8}$:

$$\mathbb{P}(T | PPP) = \frac{\frac{1}{3}}{\frac{1}{3} + \frac{2}{3} \times \frac{1}{8}} = \frac{\frac{1}{3}}{\frac{5}{12}} = \frac{4}{5}$$

b) Probabilités totales (conditionnellement à PPP) : $\frac{4}{5} \times 1 + \frac{1}{5} \times \frac{1}{2} = \frac{9}{10}$.

c) Rapport des chances $\frac{\mathbb{P}(T)}{\mathbb{P}(\bar{T})} : \frac{1}{2}$ au départ, multiplié par $\frac{1}{1/2} = 2$ à chaque pile : 1, puis 2, puis 4. D'où $\mathbb{P}(T | PPP) = \frac{4}{5}$ ✓

d) Après n piles, rapport $\frac{2^n}{2} : \mathbb{P} = \frac{2^{n-1}}{2^{n-1} + 1} \geq 0,99 \Leftrightarrow 2^{n-1} \geq 99 \Leftrightarrow n \geq 8$ ($2^7 = 128$).

Réponse. $\mathbb{P}(T | PPP) = \frac{4}{5}$; quatrième pile : $\frac{9}{10}$; 8 piles pour 99 %.

Correction de l'exercice 11 - Le paradoxe de Simpson

a) Petits : A 93 %, B 87 %. Gros : A 73 %, B 69 %. A est meilleur **dans chaque groupe**.

b) $A : \frac{273}{350} = 78$ % ; $B : \frac{289}{350} \approx 83$ % : B semble meilleur globalement !

c) Les poids diffèrent : A a surtout traité des **gros** calculs ($\frac{263}{350}$), plus difficiles, et B surtout des petits ($\frac{270}{350}$) :

$$\mathbb{P}_A(S) = \frac{87}{350} \times 0,93 + \frac{263}{350} \times 0,73, \quad \mathbb{P}_B(S) = \frac{270}{350} \times 0,87 + \frac{80}{350} \times 0,69$$

— La moyenne globale mélange l'effet du traitement et celui de la **difficulté** des cas.

d) A , car à taille de calcul égale il fait mieux. Le taux global est trompeur quand une variable (ici la taille) influence à la fois le choix du traitement et le résultat.

Réponse. A gagne dans chaque groupe (93 vs 87 %, 73 vs 69 %) mais perd globalement (78 vs 83 %) : recommander A .

Correction de l'exercice 12 - Dés non transitifs

a) Selon la face de A (chacune de probabilité $\frac{1}{3}$ par paire) : 2 bat B avec probabilité $\frac{1}{3}$ (face 1) ; 4 aussi $\frac{1}{3}$; 9 bat tout : 1.

$$\mathbb{P}(A > B) = \frac{1}{3} \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{3} + 1 \right) = \frac{5}{9}$$

b) B contre C : face 1 : 0 ; 6 : bat 3 et 5, $\frac{2}{3}$; 8 : 1. $\mathbb{P}(B > C) = \frac{1}{3} \left(0 + \frac{2}{3} + 1 \right) = \frac{5}{9}$. C contre A : 3 bat 2 ($\frac{1}{3}$) ; 5 bat 2, 4 ($\frac{2}{3}$) ; 7 bat 2, 4 ($\frac{2}{3}$) : $\frac{1}{3} \times \frac{5}{3} = \frac{5}{9}$.

c) A bat B , B bat C , C bat A , chacun avec probabilité $\frac{5}{9} > \frac{1}{2}$: la relation **n'est pas**

transitive (comme pierre-feuille-ciseaux).

d) Choisir en second : contre A prendre C , contre B prendre A , contre C prendre B ; on gagne avec probabilité $\frac{5}{9}$ quoi qu'il fasse.

Réponse. $\mathbb{P}(A > B) = \mathbb{P}(B > C) = \mathbb{P}(C > A) = \frac{5}{9}$: pas de transitivité.

Correction de l'exercice 13 - Tirages sans remise et symétrie

a) $\mathbb{P}(R_2) = \frac{3}{8} \times \frac{2}{7} + \frac{5}{8} \times \frac{3}{7} = \frac{6+15}{56} = \frac{21}{56} = \frac{3}{8}$.

b) Tous les ordres de tirage des 8 boules (numérotées) sont équiprobables ; échanger les positions 1 et k est une bijection entre les ordres où la boule en position 1 est rouge et ceux où c'est la boule en position k : $\mathbb{P}(R_k) = \mathbb{P}(R_1) = \frac{3}{8}$.

c) $\mathbb{P}(R_2 | R_1) = \frac{2}{7}$ (il reste 2 rouges sur 7) ; par symétrie

$$\mathbb{P}(R_1 | R_2) = \frac{\mathbb{P}(R_1 \cap R_2)}{\mathbb{P}(R_2)} = \frac{\frac{3}{8} \times \frac{2}{7}}{\frac{3}{8}} = \frac{2}{7}.$$

d) Les positions des rouges forment une partie uniforme à 3 éléments de $\{1, \dots, 8\}$:

$$\mathbb{P}(\text{rouges en premier}) = \frac{1}{\binom{8}{3}} = \frac{1}{56}, \quad \mathbb{P}(R_8) = \frac{3}{8}$$

Réponse. $\mathbb{P}(R_k) = \frac{3}{8}$ pour tout k ; $\mathbb{P}(R_2 | R_1) = \mathbb{P}(R_1 | R_2) = \frac{2}{7}$; rouges en tête : $\frac{1}{56}$.

Correction de l'exercice 14 - Le problème des partis

a) A gagne la partie suivante (fin) ; sinon 2-2 et une partie décisive.

b) $\mathbb{P}(A) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{3}{4}$.

c) Partage proportionnel aux probabilités de gain : 48 euros pour A , 16 pour B .

d) À 2-0 : B doit gagner trois parties de suite, $\mathbb{P}(B) = \frac{1}{8}$, $\mathbb{P}(A) = \frac{7}{8}$: 56 / 8.

— À 1-0 : A doit gagner 2 parties avant que B en gagne 3 ; on imagine 4 parties jouées (au plus nécessaires), A gagne s'il en gagne au moins 2 :

$$\mathbb{P}(A) = \frac{\binom{4}{2} + \binom{4}{3} + \binom{4}{4}}{2^4} = \frac{6+4+1}{16} = \frac{11}{16}$$

— Partage 44 / 20. (Jouer fictivement les parties inutiles ne change pas le vainqueur et rend les issues équiprobables.)

Réponse. À 2-1 : $\frac{3}{4}$, partage 48/16 ; à 2-0 : 56/8 ; à 1-0 : $\frac{11}{16}$, partage 44/20.

Correction de l'exercice 15 - Synthèse : canal bruité et code à répétition

a) $\mathbb{P}(R = 1) = 0,6 \times 0,1 + 0,4 \times 0,9 = 0,06 + 0,36 = 0,42$.

b) Bayes :

$$\mathbb{P}(E = 1 | R = 1) = \frac{0,36}{0,42} = \frac{6}{7} \approx 0,857$$

c) Erreur si au moins 2 des 3 transmissions sont inversées (loi binomiale $B(3; 0,1)$) : $3 \times 0,1^2 \times 0,9 + 0,1^3 = 0,027 + 0,001 = 0,028$ (contre 0,1 sans code, au prix d'un débit divisé par 3).

d) $\mathbb{P}(111 \mid E = 1) = 0,9^3 = 0,729$ et $\mathbb{P}(111 \mid E = 0) = 0,1^3 = 0,001$:

$$- \mathbb{P}(E = 1 \mid 111) = \frac{0,4 \times 0,729}{0,4 \times 0,729 + 0,6 \times 0,001} = \frac{0,2916}{0,2922} \approx 0,998.$$

Réponse. $\mathbb{P}(R = 1) = 0,42$; $\frac{6}{7}$; erreur du code 0,028 ; $\mathbb{P}(E = 1 \mid 111) \approx 0,998$.