

Plaquette 2 - Dénombrement avancé : bijections, crible, identités

Dénombrement et probabilités — Licence 1 (L1)

Corrections détaillées

Boîte à outils

Applications d'un ensemble à p éléments dans un ensemble à n éléments : n^p ; injectives : $\frac{n!}{(n-p)!}$; bijectives ($p = n$) : $n!$.

— **Parties** : 2^n au total, $\binom{n}{k}$ à k éléments ; **multi-ensembles** (tirages sans ordre avec remise) : $\binom{n+k-1}{k}$.

— **Étoiles et barres** : le nombre de solutions de $x_1 + \dots + x_r = n$ dans $\mathbb{N}$ vaut $\binom{n+r-1}{r-1}$.

— **Crible** :

$$|A_1 \cup \dots \cup A_m| = \sum_i |A_i| - \sum_{i < j} |A_i \cap A_j| + \sum_{i < j < k} |A_i \cap A_j \cap A_k| - \dots$$

— **Vandermonde** : $\sum_k \binom{m}{k} \binom{n}{p-k} = \binom{m+n}{p}$; **crosse de hockey** : $\sum_{k=r}^n \binom{k}{r} = \binom{n+1}{r+1}$.

Correction de l'exercice 1 - Chemins dans un quadrillage

a) Un chemin est un mot de 8 lettres contenant 5 fois D et 3 fois H ; il est déterminé par les positions des 3 lettres H :

$$\binom{8}{3} = 56 \text{ chemins}$$

b) Principe multiplicatif : $(0, 0) \rightarrow (2, 1) : \binom{3}{1} = 3$; $(2, 1) \rightarrow (5, 3) : \binom{5}{2} = 10$. Total 30.

c) $56 - 30 = 26$.

d) $\binom{a+b}{a}$. Le dernier pas arrive en (a, b) depuis $(a-1, b)$ ou $(a, b-1)$:

— $\binom{a+b}{a} = \binom{a+b-1}{a-1} + \binom{a+b-1}{a}$: c'est la relation de Pascal. **Contrôle** : $56 = \binom{7}{3} + \binom{7}{2} = 35 + 21 \checkmark$

Réponse. 56 chemins ; 30 par $(2, 1)$; 26 l'évitent ; en général $\binom{a+b}{a}$.

Correction de l'exercice 2 - Identité de Vandermonde

a) Un comité à k femmes : $\binom{m}{k}$ choix des femmes, $\binom{n}{p-k}$ des hommes. Les cas $k = 0, \dots, p$ forment une partition de l'ensemble des comités, qui compte $\binom{m+n}{p}$ éléments.

b) Avec $m = n = p$ et $\binom{n}{n-k} = \binom{n}{k}$:

$$\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \binom{n}{n-k} = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k}^2 = \binom{2n}{n}$$

c) $1 + 16 + 36 + 16 + 1 = 70 = \binom{8}{4}$ ✓

d) $(1+x)^{2n}$ a pour coefficient de x^n le nombre $\binom{2n}{n}$; dans le produit $(1+x)^n(1+x)^n$, ce coefficient est $\sum_k \binom{n}{k} \binom{n}{n-k}$ (on prend x^k dans le premier facteur, x^{n-k} dans le second) ✓

Réponse. $\sum_k \binom{m}{k} \binom{n}{p-k} = \binom{m+n}{p}$; $\sum \binom{n}{k}^2 = \binom{2n}{n}$; 70 pour $n = 4$.

Correction de l'exercice 3 - Compter les surjections par le crible

a) $|A_i| = 2^n$ (valeurs dans les deux autres éléments), $|A_i \cap A_j| = 1^n = 1$, $|A_1 \cap A_2 \cap A_3| = 0$.

b) Les non-surjectives forment $A_1 \cup A_2 \cup A_3$; par le crible,
 $|A_1 \cup A_2 \cup A_3| = 3 \cdot 2^n - 3 \cdot 1 + 0$, d'où

$$S(n) = 3^n - 3 \cdot 2^n + 3$$

c) $S(3) = 27 - 24 + 3 = 6$: les surjections de $\{1, 2, 3\}$ sur lui-même sont les $3! = 6$ bijections ✓ ; $S(4) = 81 - 48 + 3 = 36$; $S(5) = 243 - 96 + 3 = 150$.

d) Une répartition est une application $\{\text{exercices}\} \rightarrow \{\text{étudiants}\}$, et « chacun au moins un » signifie surjective : 150 façons.

Réponse. $S(n) = 3^n - 3 \cdot 2^n + 3$; $S(3) = 6$, $S(4) = 36$, $S(5) = 150$.

Correction de l'exercice 4 - Dérangements

a) $|A_{i_1} \cap \dots \cap A_{i_k}| = (n-k)!$ (les k points sont fixés, le reste est libre), et il y a $\binom{n}{k}$ choix des indices :

$$D_n = n! - \sum_{k=1}^n (-1)^{k+1} \binom{n}{k} (n-k)! = \sum_{k=0}^n (-1)^k \frac{n!}{k!}$$

b) $D_3 = 6 - 6 + 3 - 1 = 2$: les dérangements de 123 sont 231 et 312 ✓ ;
 $D_4 = 24 - 24 + 12 - 4 + 1 = 9$; $D_5 = 120 - 120 + 60 - 20 + 5 - 1 = 44$.

c) $\frac{D_n}{n!} = \sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k}{k!} \rightarrow e^{-1} \approx 0,368$: la probabilité se stabilise très vite (déjà $\frac{44}{120} \approx 0,367$ pour $n = 5$).

d) $4 \times (D_4 + D_3) = 4 \times 11 = 44 = D_5$ ✓

Réponse. $D_n = n! \sum \frac{(-1)^k}{k!}$; $D_3 = 2$, $D_4 = 9$, $D_5 = 44$; probabilité $\rightarrow \frac{1}{e}$.

Correction de l'exercice 5 - Étoiles et barres

a) x_1 étoiles, une barre, x_2 étoiles, une barre, x_3 étoiles : 12 symboles, dont on choisit la place des 2 barres :

$$\binom{12}{2} = 66$$

b) $y_1 + y_2 + y_3 = 7$ dans $\mathbb{N}$: $\binom{9}{2} = 36$.

c) Si $x_1 \geq 6$, on pose $x_1 = 6 + z$: $z + x_2 + x_3 = 4$, soit $\binom{6}{2} = 15$ solutions ; deux enfants à 6 ou plus est impossible ($12 > 10$). Réponse : $66 - 3 \times 15 = 21$.

— **Contrôle** : les solutions avec $x_i \leq 5$ de somme 10 se listent par $x_1 = 0, \dots, 5$: $x_1 = 0 : 1 ; 1 : 2 ; 2 : 3 ; 3 : 4 ; 4 : 5 ; 5 : 6$, total 21 ✓

d) Un tirage sans ordre avec remise est une répartition de 3 « tirages » entre 10 numéros : $\binom{3+10-1}{3} = \binom{12}{3} = 220$.

Réponse. 66 ; 36 ; 21 avec au plus 5 chacun ; 220 tirages.

Correction de l'exercice 6 - Parties et couples de parties

a) $A \mapsto (1_A(x_1), \dots, 1_A(x_n))$ est bijective (une partie est déterminée par ses éléments) : 2^n .

b) Chaque x est dans A (donc dans B), dans $B \setminus A$, ou hors de B : 3 choix indépendants, 3^n couples.

c) $A \cap B = \emptyset$: $x \in A$ seulement, B seulement, ou aucun : 3^n . $A \cup B = E$: $x \in A$ seulement, B seulement, ou les deux : 3^n (par passage au complémentaire, c'est le cas précédent).

d) $E = \{1, 2\}$: $B = \emptyset$ (1 couple), $B = \{1\}$ (2), $B = \{2\}$ (2), $B = E$ (4) : $9 = 3^2$ ✓ En groupant selon $|B| = k$:

$$\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} 2^k = (1+2)^n = 3^n$$

Réponse. $|P(E)| = 2^n$; 3^n couples $A \subset B$, 3^n avec $A \cap B = \emptyset$; $\sum \binom{n}{k} 2^k = 3^n$.

Correction de l'exercice 7 - Crible à trois ensembles

a) $\left\lfloor \frac{1000}{2} \right\rfloor = 500$, $\left\lfloor \frac{1000}{3} \right\rfloor = 333$, $\left\lfloor \frac{1000}{5} \right\rfloor = 200$.

b) Divisible par 2 et 3 $\Leftrightarrow$ par 6 : 166 ; par 10 : 100 ; par 15 : 66 ; par 30 : 33.

c) Crible :

$$500 + 333 + 200 - 166 - 100 - 66 + 33 = 734$$

d) Premier avec 30 = $2 \times 3 \times 5 \Leftrightarrow$ divisible par aucun des trois : $1000 - 734 = 266$.

— $1000 \times \frac{1}{2} \times \frac{2}{3} \times \frac{4}{5} = \frac{800}{3} \approx 266,7$: l'écart vient des parties entières (1000 n'est pas multiple de 30). Sur $\llbracket 1, 990 \rrbracket$, on aurait exactement $990 \times \frac{8}{30} = 264$.

Réponse. 734 divisibles par 2, 3 ou 5 ; 266 premiers avec 30.

Correction de l'exercice 8 - Triangles dans un polygone

a) Segments joignant deux sommets : $\binom{10}{2} = 45$, moins les 10 côtés : 35 diagonales ($\frac{n(n-3)}{2}$).

b) $\binom{10}{3} = 120$ triangles.

c) Deux côtés communs : trois sommets **consécutifs**, 10 triangles (un par sommet central). Exactement un côté : on choisit le côté (10 façons), puis un troisième sommet non voisin de ses extrémités : $10 - 4 = 6$ choix, soit 60.

d) $120 - 10 - 60 = 50$; la formule donne $\frac{10 \times 6 \times 5}{6} = 50$ ✓

$$\binom{n}{3} - n - n(n-4) = \frac{n(n-4)(n-5)}{6}$$

— (Contrôle $n = 6$: $20 - 6 - 12 = 2$, les deux triangles « étoilés » de l'hexagone ✓)

Réponse. 35 diagonales ; 120 triangles, dont 10 à deux côtés, 60 à un côté, 50 sans côté commun.

Correction de l'exercice 9 - Mains au poker

a) $\binom{52}{5} = 2\,598\,960$.

b) Hauteur de la paire : 13 ; ses deux couleurs : $\binom{4}{2} = 6$; les trois autres hauteurs : $\binom{12}{3} = 220$; une couleur pour chacune : $4^3 = 64$.

$$13 \times 6 \times 220 \times 64 = 1\,098\,240$$

c) Hauteur du brelan (13) et ses couleurs ($\binom{4}{3} = 4$), hauteur de la paire (12) et ses couleurs (6) : $13 \times 4 \times 12 \times 6 = 3744$.

d) $\mathbb{P}(\text{une paire}) \approx 0,4226$; $\mathbb{P}(\text{full}) = \frac{3744}{2\,598\,960} \approx 0,00144$.

— **Piège** : écrire $\binom{13}{2}$ pour les hauteurs du full oublierait que les rôles (brelan, paire) ne sont pas symétriques ; il faut 13×12 .

Réponse. 2 598 960 mains ; une paire : 1 098 240 ($\approx 42,3\%$) ; full : 3744 ($\approx 0,14\%$).

Correction de l'exercice 10 - Mots sans lettres voisines

a) $\binom{8}{3} = 56$.

b) On écrit les 5 lettres b ; elles délimitent 6 trous (avant, entre, après). Mettre au plus un a par trou garantit la non-adjacence, et réciproquement : on choisit 3 trous parmi 6 :

$$\binom{6}{3} = 20$$

c) $n - k$ lettres b , $n - k + 1$ trous : $\binom{n-k+1}{k}$ (nul si $k > n - k + 1$).

d) C'est exactement b) (jour de télétravail = a) : 20 façons.

— **Contrôle** sur un petit cas : $n = 4$, $k = 2$: $\binom{3}{2} = 3$ mots $abab$, $abba$, $baba$ ✓

Réponse. 56 mots à 3 a ; 20 sans a voisins ; en général $\binom{n-k+1}{k}$.

Correction de l'exercice 11 - Sommes de coefficients binomiaux pondérées

a) Choisir un comité de taille k puis son président : $k \binom{n}{k}$; somme sur k . Autrement : choisir le président (n façons), puis n'importe quelle partie des $n - 1$ autres (2^{n-1}).

b) $\frac{d}{dx}(1+x)^n = n(1+x)^{n-1} = \sum k \binom{n}{k} x^{k-1}$, puis $x = 1$.

c) Dériver deux fois : $n(n-1)(1+x)^{n-2} = \sum k(k-1) \binom{n}{k} x^{k-2}$, en $x = 1$. Puis

$$k^2 = k(k-1) + k :$$

$$\sum_{k=0}^n k^2 \binom{n}{k} = n(n-1)2^{n-2} + n2^{n-1} = n(n+1)2^{n-2}$$

$$\text{d) } n = 4 : \sum k \binom{4}{k} = 4 + 12 + 12 + 4 = 32 = 4 \times 8 \checkmark ;$$

$$\sum k^2 \binom{4}{k} = 4 + 24 + 36 + 16 = 80 = 4 \times 5 \times 4 \checkmark$$

— **Lien avec les probabilités** : pour $X \sim B(n, \frac{1}{2})$, a) donne $E(X) = \frac{n}{2}$ et c) $E(X^2) = \frac{n(n+1)}{4}$, d'où $V(X) = \frac{n}{4} \checkmark$

Réponse. $\sum k \binom{n}{k} = n2^{n-1}$; $\sum k^2 \binom{n}{k} = n(n+1)2^{n-2}$; 32 et 80 pour $n = 4$.

Correction de l'exercice 12 - Crosse de hockey et somme des carrés

$$\text{a) } n = r : \binom{r}{r} = 1 = \binom{r+1}{r+1} \checkmark \text{ Hérédité : } \binom{n+1}{r+1} + \binom{n+1}{r} = \binom{n+2}{r+1} \text{ (Pascal).}$$

b) Si le plus grand élément choisi est $k+1$, les r autres sont pris dans $\{1, \dots, k\} : \binom{k}{r}$ façons, k allant de r à n .

c)

$$\sum_{k=1}^n k^2 = 2 \binom{n+1}{3} + \binom{n+1}{2} = \frac{(n+1)n(n-1)}{3} + \frac{(n+1)n}{2} = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

$$\text{d) } \sum k^3 = 6 \binom{n+1}{4} + 6 \binom{n+1}{3} + \binom{n+1}{2}. \text{ Pour } n = 3 : 6 \times 1 + 6 \times 4 + 6 = 36 = 1 + 8 + 27 \checkmark \text{ (et } 36 = 6^2 = \left(\frac{3 \times 4}{2}\right)^2 : \text{ on retrouve } \sum k^3 = \left(\sum k\right)^2).$$

$$\text{Réponse. } \sum_{k=r}^n \binom{k}{r} = \binom{n+1}{r+1} ; \sum k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} ; \sum_{k \leq 3} k^3 = 36.$$

Correction de l'exercice 13 - Les quatre façons de tirer

$$\text{a) } 10^3 = 1000 ; 10 \times 9 \times 8 = 720 ; \binom{10}{3} = 120 \text{ (chaque ensemble correspond à } 3! = 6 \text{ tirages ordonnés : } 720 = 6 \times 120 \checkmark).$$

b) Un résultat est un multi-ensemble : combien de fois chaque numéro sort, soit $x_1 + \dots + x_{10} = 3$:

$$\binom{3+10-1}{10-1} = \binom{12}{3} = 220$$

$$\text{c) } \frac{720}{1000} = 0,72.$$

d) Le multi-ensemble $\{1, 1, 1\}$ provient d'un seul tirage ordonné, alors que $\{1, 2, 3\}$ en provient de 6 : ces résultats n'ont pas la même probabilité ($\frac{1}{1000}$ contre $\frac{6}{1000}$). Le bon univers équiprobable est celui des tirages **ordonnés**.

Réponse. 1000, 720, 120 et 220 ; probabilité de trois numéros distincts 0,72.

Correction de l'exercice 14 - Compter des applications

$$\text{a) } n^p ; \frac{n!}{(n-p)!} \text{ si } p \leq n \text{ (sinon 0).}$$

b) Une application strictement croissante est déterminée par son image (ensemble de p

valeurs, rangées dans l'ordre) : $\binom{n}{p}$.

c) Si $f(i) \leq f(i+1)$, alors $g(i+1) - g(i) = f(i+1) - f(i) + 1 \geq 1$: g strictement croissante, à valeurs dans $\llbracket 1, n+p-1 \rrbracket$; l'inverse est $f(i) = g(i) - i + 1$.

$$\text{Card}\{\text{croissantes } E \rightarrow F\} = \binom{n+p-1}{p}$$

d) $p = 2, n = 3$: applications $9 = 3^2$ ✓ ; injections 6 ✓ ; strictement croissantes $(1, 2), (1, 3), (2, 3)$: $3 = \binom{3}{2}$ ✓ ; croissantes : les 3 précédentes et $(1, 1), (2, 2), (3, 3)$: $6 = \binom{4}{2}$ ✓

Réponse. n^p ; $\frac{n!}{(n-p)!}$; strictement croissantes $\binom{n}{p}$; croissantes $\binom{n+p-1}{p}$.

Correction de l'exercice 15 - Synthèse : chemins sous la diagonale et nombres de Catalan

a) Mots de 3 D et 3 H dont tout préfixe a au moins autant de D que de H : $DDDDHHH, DDHDHH, DDHHDH, DHDDHH, DHDHDDH$: 5 chemins.

b) Le symétrique de $(0, 0)$ par rapport à $y = x + 1$ est $(-1, 1)$; la partie après le premier contact est conservée. Réciproquement, tout chemin de $(-1, 1)$ à (n, n) doit traverser $y = x + 1$ (il part au-dessus de cette droite et arrive en dessous), et l'on défait la symétrie avant le premier contact. Ces chemins font $n+1$ pas D et $n-1$ pas H :

$$\text{Card}\{\text{mauvais}\} = \binom{2n}{n+1}$$

c) $C_n = \binom{2n}{n} - \binom{2n}{n+1}$, et $\binom{2n}{n+1} = \binom{2n}{n} \frac{n}{n+1}$, d'où $C_n = \frac{1}{n+1} \binom{2n}{n}$.

d) $C_3 = \frac{20}{4} = 5$ ✓ (a) ; $C_4 = \frac{70}{5} = 14$.

— Les nombres de Catalan 1, 1, 2, 5, 14, 42, ... comptent aussi les parenthésages corrects, les triangulations d'un polygone, etc.

Réponse. $C_n = \binom{2n}{n} - \binom{2n}{n+1} = \frac{1}{n+1} \binom{2n}{n}$; $C_3 = 5, C_4 = 14$.