

Plaquette 4 - Variables aléatoires : lois, espérance, variance

Dénombrement et probabilités — Licence 1 (L1)

Corrections détaillées

Boîte à outils

Espérance $\mathbb{E}(X) = \sum x \mathbb{P}(X = x)$; **transfert** : $\mathbb{E}(f(X)) = \sum f(x) \mathbb{P}(X = x)$; indicatrice : $\mathbb{E}(1_A) = \mathbb{P}(A)$.

— **Variance** $V(X) = \mathbb{E}(X^2) - \mathbb{E}(X)^2$; **covariance** $\text{Cov}(X, Y) = \mathbb{E}(XY) - \mathbb{E}(X)\mathbb{E}(Y)$;
 $V(X + Y) = V(X) + V(Y) + 2\text{Cov}(X, Y)$

— Indépendance $\Rightarrow \text{Cov} = 0$ (réciproque fausse).

— **Markov** ($X \geq 0$) : $\mathbb{P}(X \geq a) \leq \frac{\mathbb{E}(X)}{a}$; **Bienaymé-Tchebychev** :
 $\mathbb{P}(|X - \mathbb{E}(X)| \geq \varepsilon) \leq \frac{V(X)}{\varepsilon^2}$.

— **Hypergéométrique** (n tirages sans remise, proportion p parmi N) : $\mathbb{E} = np$,
 $V = np(1 - p)\frac{N - n}{N - 1}$.

— Pour X à valeurs dans $\mathbb{N}$: $\mathbb{E}(X) = \sum_{k \geq 1} \mathbb{P}(X \geq k)$.

Correction de l'exercice 1 - Somme de deux dés

a) Pour $s \in \llbracket 2, 12 \rrbracket$, les couples $(a, s - a)$ avec $1 \leq a \leq 6$ et $1 \leq s - a \leq 6$ sont au nombre de $s - 1$ si $s \leq 7$ et $13 - s$ si $s \geq 7$, soit $6 - |s - 7|$ dans les deux cas.

b) Par symétrie de la loi autour de 7, $\mathbb{E}(S) = 7$; par linéarité, $\mathbb{E}(S) = 2 \times \frac{7}{2} = 7$ ✓

c) Un dé : $V = \frac{91}{6} - \frac{49}{4} = \frac{35}{12}$. Dés indépendants :

$$V(S) = 2 \times \frac{35}{12} = \frac{35}{6} \approx 5,83$$

d) $|S - 7| > 3 \Leftrightarrow S \in \{2, 3, 11, 12\}$: $\frac{1 + 2 + 2 + 1}{36} = \frac{1}{6} \approx 0,167$. Bienaymé-Tchebychev avec $\varepsilon = 4$: $\mathbb{P}(|S - 7| \geq 4) \leq \frac{35/6}{16} \approx 0,365$: borne vraie mais grossière.

Réponse. $\mathbb{P}(S = s) = \frac{6 - |s - 7|}{36}$; $\mathbb{E}(S) = 7$, $V(S) = \frac{35}{6}$; $\mathbb{P}(|S - 7| > 3) = \frac{1}{6}$.

Correction de l'exercice 2 - Le maximum de deux dés

a) $M \leq k \Leftrightarrow$ les deux dés sont $\leq k$: indépendance, $\mathbb{P}(M \leq k) = \left(\frac{k}{6}\right)^2$.

b) $\mathbb{P}(M = k) = \mathbb{P}(M \leq k) - \mathbb{P}(M \leq k - 1) = \frac{k^2 - (k - 1)^2}{36} = \frac{2k - 1}{36}$ (somme : $\frac{1 + 3 + \dots + 11}{36} = 1$ ✓).

c)

$$\mathbb{E}(M) = \sum_{k=1}^6 k \frac{2k - 1}{36} = \frac{1 + 6 + 15 + 28 + 45 + 66}{36} = \frac{161}{36} \approx 4,47$$

d) $\mathbb{P}(M \geq k) = 1 - \frac{(k - 1)^2}{36} : \sum_{k=1}^6 = 6 - \frac{0 + 1 + 4 + 9 + 16 + 25}{36} = 6 - \frac{55}{36} = \frac{161}{36}$ ✓

— Le maximum dépasse nettement la moyenne d'un dé (3,5), ce qu'on attendait.

Réponse. $\mathbb{P}(M = k) = \frac{2k - 1}{36}$; $\mathbb{E}(M) = \frac{161}{36} \approx 4,47$.

Correction de l'exercice 3 - Contrôle de qualité : loi hypergéométrique

$$\text{a) } \mathbb{P}(X = k) = \frac{\binom{4}{k} \binom{16}{5-k}}{\binom{20}{5}}, k \in \llbracket 0, 4 \rrbracket.$$

$$\mathbb{P}(X = 0) = \frac{\binom{16}{5}}{\binom{20}{5}} = \frac{4368}{15504} \approx 0,282$$

b) $X = \sum_{i=1}^5 1_{D_i}$ où D_i : « la i -ième pièce (dans un ordre de tirage) est défectueuse » ; par symétrie $\mathbb{P}(D_i) = \frac{4}{20}$, donc $\mathbb{E}(X) = 5 \times 0,2 = 1$.

c) $5 \times 0,2 \times 0,8 \times \frac{15}{19} \approx 0,632$, contre 0,8 pour la binomiale : tirer sans remise **réduit** la variance (facteur $\frac{15}{19}$).

d) C'est $\mathbb{P}(X = 0) \approx 0,28$: ce contrôle laisse passer plus d'un lot mauvais sur quatre. Un échantillon plus grand est nécessaire.

Réponse. $\mathbb{P}(X = 0) \approx 0,282$; $\mathbb{E}(X) = 1$; $V(X) \approx 0,632$.

Correction de l'exercice 4 - Points fixes d'une permutation aléatoire

$$\text{a) } \mathbb{P}(A_i) = \frac{(n-1)!}{n!} = \frac{1}{n}, \text{ donc } \mathbb{E}(X) = n \times \frac{1}{n} = 1.$$

$$\text{b) } \mathbb{P}(A_i \cap A_j) = \frac{(n-2)!}{n!} = \frac{1}{n(n-1)}. X^2 = \sum_i 1_{A_i} + \sum_{i \neq j} 1_{A_i \cap A_j} :$$

$$\mathbb{E}(X^2) = 1 + n(n-1) \times \frac{1}{n(n-1)} = 2, \quad V(X) = 2 - 1 = 1$$

$$\text{c) } 123 \text{ (3 points fixes), } 132, 213, 321 \text{ (1 chacune), } 231, 312 \text{ (0) : } \mathbb{E}(X) = \frac{3+3}{6} = 1 \checkmark, \\ \mathbb{E}(X^2) = \frac{9+3}{6} = 2 \checkmark$$

d) Espérance et variance valent 1 **pour tout** $n \geq 2$; la loi elle-même tend vers une loi de Poisson de paramètre 1 ($\mathbb{P}(X = 0) \rightarrow \frac{1}{e}$, cf. dérangements).

Réponse. $\mathbb{E}(X) = 1, V(X) = 1$ pour tout $n \geq 2$.

Correction de l'exercice 5 - Covariance d'un dé et de la somme

$$\text{a) } \text{Cov}(X, X+Y) = V(X) + \text{Cov}(X, Y) = \frac{35}{12} + 0 \text{ (indépendance).}$$

b)

$$\rho = \frac{\frac{35}{12}}{\sqrt{\frac{35}{12}} \sqrt{\frac{35}{6}}} = \sqrt{\frac{35/12}{35/6}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \approx 0,71$$

c) $\text{Cov}(X+Y, X-Y) = V(X) - V(Y) = 0$. Pourtant S et D ne sont **pas** indépendantes : $\mathbb{P}(S = 12, D = 0) = \frac{1}{36}$, mais $\mathbb{P}(S = 12)\mathbb{P}(D = 0) = \frac{1}{36} \times \frac{6}{36}$; et $S = 12$ **impose** $D = 0$.

$$\text{d) } \frac{35}{12} + \frac{35}{12} + 0 = \frac{35}{6} \checkmark \text{ (exercice 1).}$$

Réponse. $\text{Cov}(X, S) = \frac{35}{12}, \rho = \frac{1}{\sqrt{2}}$; $\text{Cov}(S, D) = 0$ sans indépendance.

Correction de l'exercice 6 - Bienaymé-Tchebychev et pile ou face

a) $X \sim B(n, \frac{1}{2}) : \mathbb{E}(F) = \frac{1}{2}, V(F) = \frac{1}{n^2} \times \frac{n}{4} = \frac{1}{4n}.$

b) $V(X) = 25 :$

$$\mathbb{P}(|X - 50| \geq 10) \leq \frac{25}{100} = 0,25$$

— La vraie valeur ($\approx 0,057$) est bien plus petite : l'inégalité est **universelle** (valable pour toute loi), donc pessimiste.

c) $\frac{1}{4n \times 0,05^2} \leq 0,05 \Leftrightarrow n \geq \frac{1}{4 \times 0,0025 \times 0,05} = 2000.$

d) $\mathbb{P}(|F - \frac{1}{2}| \geq \varepsilon) \leq \frac{1}{4n\varepsilon^2} \rightarrow 0$ quand $n \rightarrow +\infty$, pour tout $\varepsilon > 0$ fixé.

Réponse. $V(F) = \frac{1}{4n}$; borne 0,25 (vraie valeur 0,057) ; $n \geq 2000$; loi faible des grands nombres.

Correction de l'exercice 7 - Valeur la plus probable d'une binomiale

a) $\frac{\binom{n}{k+1} p^{k+1} q^{n-k-1}}{\binom{n}{k} p^k q^{n-k}} = \frac{n-k}{k+1} \times \frac{p}{q},$ car $\binom{n}{k+1} = \binom{n}{k} \frac{n-k}{k+1}.$

b) Le rapport est $> 1 \Leftrightarrow (n-k)p > (k+1)q \Leftrightarrow np - kp > kq + q \Leftrightarrow k < np - q = (n+1)p - 1.$

c) $(n+1)p = 3,3$: la probabilité croît jusqu'à $k = 3$ puis décroît, **mode** 3 :

$$0,234 < 0,267 > 0,200$$

— Le mode est proche de l'espérance $np = 3.$

d) Si $(n+1)p = m$ est entier, le rapport vaut exactement 1 pour $k = m - 1$: **deux modes** $m - 1$ et m (par exemple $B(3; \frac{1}{2}) : \mathbb{P}(X = 1) = \mathbb{P}(X = 2) = \frac{3}{8}.$

Réponse. Rapport $\frac{(n-k)p}{(k+1)q}$; mode $\lfloor (n+1)p \rfloor$; $B(10; 0,3)$: mode 3.

Correction de l'exercice 8 - Le collectionneur de vignettes

a) Quand on a $k - 1$ modèles, un paquet en apporte un nouveau avec probabilité $p_k = \frac{n-k+1}{n}$, indépendamment : T_k suit la loi géométrique $G(p_k)$, d'espérance $\frac{1}{p_k}.$

b) Linéarité :

$$\mathbb{E}(T) = \sum_{k=1}^n \frac{n}{n-k+1} = n \sum_{j=1}^n \frac{1}{j}$$

c) $n = 3 : 3 \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3}\right) = \frac{11}{2} = 5,5.$ Dé : $6 \times \frac{49}{20} = 14,7$ lancers en moyenne pour voir les six faces.

d) $\sum_{j=1}^n \frac{1}{j} \sim \ln n$, donc $\mathbb{E}(T) \sim n \ln n$ (par exemple $n = 100$: environ 519 paquets).

Réponse. $\mathbb{E}(T) = n \sum \frac{1}{j}$; 5,5 pour $n = 3$; 14,7 pour un dé ; $\sim n \ln n.$

Correction de l'exercice 9 - Fonction génératrice

a) Bernoulli : $q + ps.$ Binomiale : $\sum \binom{n}{k} p^k q^{n-k} s^k = (q + ps)^n$ (binôme).

b) $G_X'(s) = \sum k \mathbb{P}(X = k) s^{k-1}$, en $s = 1 : \mathbb{E}(X)$; de même pour G'' . Pour la binomiale :

$$G'(1) = np, G''(1) = n(n-1)p^2 :$$

$$V(X) = n(n-1)p^2 + np - n^2p^2 = np(1-p)$$

c) $s^{X+Y} = s^X s^Y$ et, par indépendance, $\mathbb{E}(s^{X+Y}) = \mathbb{E}(s^X)\mathbb{E}(s^Y)$.

d) $G_{X+Y} = (q+ps)^m(q+ps)^n = (q+ps)^{m+n}$: c'est la fonction génératrice de $B(m+n, p)$, et un polynôme détermine ses coefficients : $X+Y \sim B(m+n, p)$.

Réponse. $G = (q+ps)^n$; $V = np(1-p)$; $G_{X+Y} = G_X G_Y$; $X+Y \sim B(m+n, p)$.

Correction de l'exercice 10 - Inégalité de Markov

a) Si $X \geq a$, le membre de gauche vaut $a \leq X$; sinon il vaut 0 $\leq X$. Espérance (croissante) :

$$a \mathbb{P}(X \geq a) \leq \mathbb{E}(X)$$

b) $\mathbb{P}(X \geq 10\,000) \leq \frac{2000}{10\,000} = 20\%$ (sans rien savoir d'autre sur la répartition).

c) $X = 5$ avec probabilité $\frac{1}{5}$, 0 sinon : $\mathbb{E}(X) = 1$ et $\mathbb{P}(X \geq 5) = \frac{1}{5} = \frac{\mathbb{E}(X)}{5}$: égalité.

d) $\mathbb{P}(|X - \mathbb{E}X| \geq \varepsilon) = \mathbb{P}((X - \mathbb{E}X)^2 \geq \varepsilon^2) \leq \frac{\mathbb{E}((X - \mathbb{E}X)^2)}{\varepsilon^2} = \frac{V(X)}{\varepsilon^2}$ ✓

Réponse. $\mathbb{P}(X \geq a) \leq \frac{\mathbb{E}(X)}{a}$; au plus 20 % ; égalité pour $X \in \{0, 5\}$.

Correction de l'exercice 11 - Espérance de gain à la roulette

a) $G = 1$ avec probabilité $\frac{18}{37}$, -1 avec probabilité $\frac{19}{37}$: $\mathbb{E}(G) = -\frac{1}{37} \approx -0,027$; $\mathbb{E}(G^2) = 1$, $V(G) = 1 - \frac{1}{37^2} \approx 0,999$.

b) Linéarité et indépendance : $\mathbb{E} = -\frac{100}{37} \approx -2,70$ euros, $\sigma = \sqrt{100 \times 0,999} \approx 10$ euros.

c) $\mathbb{E} = 35 \times \frac{1}{37} - \frac{36}{37} = -\frac{1}{37}$: **même espérance** ! Mais

$$V = \mathbb{E}(G^2) - \mathbb{E}(G)^2 = \frac{35^2 + 36}{37} - \frac{1}{37^2} \approx 34,1$$

— beaucoup plus risqué, pour le même désavantage moyen.

d) Non : chaque pari a une espérance de $-\frac{1}{37}$ par euro misé, et l'espérance d'une somme est la somme des espérances ; toute stratégie a une espérance égale à $-\frac{1}{37}$ fois la mise totale moyenne.

Réponse. $\mathbb{E}(G) = -\frac{1}{37}$; sur 100 mises : $-2,70$ € (écart type ≈ 10 €) ; plein : même espérance, variance ≈ 34 .

Correction de l'exercice 12 - Centrer et réduire

a) $\mathbb{E}(X^2) = V(X) + \mathbb{E}(X)^2 = 4 + 25 = 29$; $\mathbb{E}((X-3)^2) = 29 - 30 + 9 = 8$.

b) $V(Y) = a^2 \times 4 = 1$: $a = \frac{1}{2}$; $\mathbb{E}(Y) = \frac{5}{2} + b = 0$: $b = -\frac{5}{2}$. $Y = \frac{X-5}{2}$.

c) $\mathbb{E}((X-t)^2) = \mathbb{E}(X^2) - 2t\mathbb{E}(X) + t^2$, trinôme minimal en $t = \mathbb{E}(X)$:

$$\min_t \mathbb{E}((X-t)^2) = V(X) = 4$$

— (Contrôle : en $t = 3$ on trouve $8 > 4$ ✓)

d) Par c) avec $t = 5$: $V(X) = \mathbb{E}((X-5)^2) \leq \mathbb{E}(25) = 25$ car $|X-5| \leq 5$. Égalité si $|X-5| = 5$ presque sûrement : $X = 0$ ou 10 avec probabilité $\frac{1}{2}$ chacun.

Réponse. $\mathbb{E}(X^2) = 29$; $Y = \frac{X-5}{2}$; minimum de $\mathbb{E}((X-t)^2) : V(X)$ en $t = 5$; $V \leq 25$.

Correction de l'exercice 13 - Covariance nulle sans indépendance

a) $Y = 0$ avec probabilité $\frac{1}{3}$, $Y = 1$ avec probabilité $\frac{2}{3}$.

b) $\mathbb{E}(X) = 0$ et $XY = X^3 = X$:

$$\text{Cov}(X, Y) = \mathbb{E}(X^3) - \mathbb{E}(X)\mathbb{E}(X^2) = 0 - 0 = 0$$

c) Non : $\mathbb{P}(X = 0, Y = 1) = 0$ alors que $\mathbb{P}(X = 0)\mathbb{P}(Y = 1) = \frac{1}{3} \times \frac{2}{3} = \frac{2}{9}$. Y est même une **fonction** de X ! La covariance ne mesure que la dépendance **linéaire**.

d) Par indépendance, $\mathbb{E}(UV) = \mathbb{E}(U)\mathbb{E}(V) = 2 \times 2 = 4$. Contrôle direct : $\frac{1}{9}(1+2+3)^2 = \frac{36}{9} = 4$ ✓ (la somme des UV sur les 9 couples vaut $(1+2+3)^2$).
 $\text{Cov} = 4 - 4 = 0$.

Réponse. $\text{Cov}(X, X^2) = 0$ mais X et X^2 dépendantes ; $\mathbb{E}(UV) = 4$.

Correction de l'exercice 14 - Espérance par les queues de loi

a) Pour $X = j$, la somme $\sum_{k=1}^n 1_{\{j \geq k\}}$ compte les $k \leq j$: elle vaut j . Linéarité : $\mathbb{E}(X) = \sum_k \mathbb{P}(X \geq k)$.

b) $X \geq k \Leftrightarrow$ les deux dés $\geq k$: $\mathbb{P}(X \geq k) = \left(\frac{7-k}{6}\right)^2$.

$$\mathbb{E}(X) = \frac{36 + 25 + 16 + 9 + 4 + 1}{36} = \frac{91}{36} \approx 2,53$$

c) $\frac{91}{36} + \frac{161}{36} = \frac{252}{36} = 7$ ✓ Car $\min + \max = X_1 + X_2$, d'espérance 7.

d) $\mathbb{P}(X \geq k) = q^{k-1}$: $\mathbb{E}(X) = \sum_{k \geq 1} q^{k-1} = \frac{1}{1-q} = \frac{1}{p}$ ✓

Réponse. $\mathbb{E}(X) = \sum \mathbb{P}(X \geq k)$; $\mathbb{E}(\min) = \frac{91}{36}$; $\mathbb{E}(\min) + \mathbb{E}(\max) = 7$.

Correction de l'exercice 15 - Synthèse : boîtes vides

a) $\mathbb{P}(B_i) = \left(1 - \frac{1}{n}\right)^n$ (aucune des n boules ne tombe dans i), donc

$$\mathbb{E}(V) = n \left(1 - \frac{1}{n}\right)^n$$

b) $n = 3$: 0 boîte vide $\Leftrightarrow$ une boule par boîte : $3! = 6$; 2 boîtes vides : toutes dans la même, 3 ; 1 boîte vide : $27 - 6 - 3 = 18$. $\mathbb{E}(V) = \frac{18+6}{27} = \frac{8}{9}$, et la formule donne $3 \times \frac{8}{27} = \frac{8}{9}$ ✓

c) $\mathbb{P}(B_i \cap B_j) = \left(\frac{1}{3}\right)^3 = \frac{1}{27}$. $V(V) = \sum_i V(1_{B_i}) + \sum_{i \neq j} \text{Cov} :$

$$- 3 \times \frac{8}{27} \times \frac{19}{27} + 6 \left(\frac{1}{27} - \frac{64}{729} \right) = \frac{456 - 222}{729} = \frac{26}{81}.$$

— Par la loi : $\mathbb{E}(V^2) = \frac{18+12}{27} = \frac{10}{9}$ et $\frac{10}{9} - \frac{64}{81} = \frac{26}{81}$ ✓ (covariances **négligables** : une boîte vide rend les autres moins souvent vides).

d) $\left(1 - \frac{1}{n}\right)^n = e^{n \ln(1 - 1/n)} \rightarrow e^{-1}$: environ 37 % des boîtes restent vides.

Réponse. $\mathbb{E}(V) = n(1 - \frac{1}{n})^n$; $n = 3$: loi $(6, 18, 3)/27$, $\mathbb{E} = \frac{8}{9}$, $V = \frac{26}{81}$; proportion $\rightarrow \frac{1}{e}$.