

Plaquette 1 - Combinatoire, conditionnement, variables aléatoires et espérance

Dénombrement et probabilités — Licence 1 (L1)

Exercices

Méthode

On dénombre en identifiant **ordre** et **répétition**, on calcule des probabilités par équiprobabilité, **probabilités totales** ou **Bayes**, et on manipule lois, **espérance** et **variance**.

Exercice 1 - Dénombrement de base

Dans une classe de 25 étudiants, on choisit un délégué, un trésorier et un secrétaire (postes distincts, une personne par poste).

- a) Combien de choix possibles ?
- b) Et si l'on choisit simplement une commission de 3 personnes ?

Exercice 2 - Passage par le complémentaire

On lance 4 dés. Quelle est la probabilité d'obtenir **au moins un** six ?

Exercice 3 - Probabilités conditionnelles

Une urne contient 4 boules blanches et 6 noires. On tire deux boules **sans remise**.

- a) Probabilité que les deux soient blanches ?
- b) Probabilité que la seconde soit blanche ?

Exercice 4 - Formule de Bayes

Deux usines produisent des ampoules : A fournit 70 % avec 3 % de défauts, B fournit 30 % avec 8 % de défauts. Une ampoule est défectueuse : quelle est la probabilité qu'elle vienne de B ?

Exercice 5 - Test de dépistage

Une maladie touche 2 % de la population. Un test détecte 95 % des malades et donne 5 % de faux positifs. Un test est positif : quelle est la probabilité d'être malade ?

Exercice 6 - Indépendance

On tire une carte dans un jeu de 32. Les événements « tirer un roi » et « tirer un cœur » sont-ils indépendants ?

Exercice 7 - Loi binomiale

Un QCM comporte 8 questions à 3 choix. Un étudiant répond au hasard ; soit X le nombre de bonnes réponses.

- a) Loi de X , espérance et variance ?
- b) Probabilité d'avoir au moins 4 bonnes réponses ?

Exercice 8 - Espérance et variance

Soit X de loi $\mathbb{P}(X = -1) = 0,3$, $\mathbb{P}(X = 0) = 0,2$, $\mathbb{P}(X = 2) = 0,5$. Calculer $\mathbb{E}(X)$, $V(X)$ et $\mathbb{E}(3X - 1)$.

Exercice 9 - Espérance de gain

Un jeu coûte 2 € ; on lance deux dés et l'on gagne 10 € si la somme vaut 7, rien sinon. Le jeu est-il favorable ?

Exercice 10 - Loi uniforme

Soit X uniforme sur $\llbracket 1, 10 \rrbracket$. Calculer $\mathbb{E}(X)$, $V(X)$ et $\mathbb{P}(X > 7)$.

Exercice 11 - Anagrammes et dénombrement

Combien d'anagrammes du mot **STATISTIQUE** ? (11 lettres)

Exercice 12 - Somme de variables indépendantes

Soient $X \sim B(10; 0,4)$ et $Y \sim B(15; 0,4)$ indépendantes. Déterminer la loi, l'espérance et la variance de $X + Y$.

Exercice 13 - Le problème des anniversaires

Dans un groupe de n personnes ($n \leq 365$), on suppose les anniversaires indépendants et uniformes sur 365 jours.

a) Montrer que la probabilité q_n que les n anniversaires soient tous distincts vaut $\prod_{k=0}^{n-1} \frac{365-k}{365}$.

b) Calculer $1 - q_{23}$ (on donne $q_{23} \approx 0,4927$) et interpréter.

c) À l'aide de $1 - x \leq e^{-x}$, montrer que $q_n \leq \exp\left(-\frac{n(n-1)}{730}\right)$ et évaluer ce majorant pour $n = 23$.

d) On donne $1 - q_{40} \approx 0,891$ et $1 - q_{41} \approx 0,903$: quel est le plus petit groupe où une coïncidence est probable à 90 % ?

Exercice 14 - Attendre le premier six : loi géométrique

On lance un dé équilibré jusqu'à obtenir un six ; X est le numéro du lancer où apparaît le premier six.

a) Déterminer $\mathbb{P}(X = k)$ pour $k \geq 1$ et vérifier que la somme vaut 1.

b) Calculer $\mathbb{P}(X > k)$ et la probabilité d'obtenir un six en au plus 4 lancers.

c) Calculer $\mathbb{E}(X)$ en utilisant $\sum_{k \geq 1} kx^{k-1} = \frac{1}{(1-x)^2}$ pour $|x| < 1$.

d) Montrer que $\mathbb{P}(X > k + m \mid X > k) = \mathbb{P}(X > m)$ et interpréter (« absence de

mémoire »).

Exercice 15 – Synthèse : problème complet

Une urne contient 3 boules rouges et 5 bleues. On tire 3 boules **simultanément**. Soit X le nombre de rouges.

- a) Déterminer la loi de X .
- b) Calculer $\mathbb{E}(X)$ et vérifier par un autre argument.