

Plaquette 3 - Conditionnement, Bayes et indépendance

Dénombrement et probabilités — Licence 1 (L1)

Exercices

Méthode

Un problème de probabilités se gagne sur le **modèle** : nommer les événements, identifier un **système complet** (les causes possibles), écrire les probabilités données comme des probabilités **conditionnelles**, puis appliquer formule des probabilités totales et formule de Bayes. L'intuition est souvent fautive (Monty Hall, dépistage, Simpson) : on fait confiance au calcul, et on le contrôle par un raisonnement de fréquences (« sur 1000 personnes... »).

Exercice 1 - Le problème de Monty Hall

Un candidat choisit une porte parmi 3 ; une seule cache une voiture. L'animateur, qui sait où elle est, ouvre une **autre** porte, sans voiture (au hasard s'il a le choix), puis propose au candidat de changer.

- Le candidat a choisi la porte 1. On note V_i « la voiture est derrière la porte i » et O_3 « l'animateur ouvre la porte 3 ». Calculer $\mathbb{P}(O_3 \mid V_i)$ pour $i = 1, 2, 3$.
- En déduire $\mathbb{P}(V_2 \mid O_3)$ et $\mathbb{P}(V_1 \mid O_3)$. Faut-il changer ?
- Contrôler par un raisonnement de fréquence sur 300 parties.
- Avec 4 portes (l'animateur en ouvre une seule, sans voiture, et le candidat qui change choisit au hasard parmi les deux autres fermées), comparer « rester » et « changer ».

Exercice 2 - Bayes à trois causes

Trois machines M_1, M_2, M_3 produisent respectivement 50 %, 30 % et 20 % des pièces, avec des taux de défauts de 1 %, 2 % et 5 %.

- Calculer la probabilité qu'une pièce prise au hasard soit défectueuse.
- Une pièce est défectueuse : quelle est la probabilité qu'elle vienne de chaque machine ?
- Vérifier que ces trois probabilités somment à 1 et commenter le classement.
- On veut que M_3 produise moins de 30 % des pièces défectueuses : quel taux de défauts maximal lui imposer ?

Exercice 3 - Dépistage : un test, puis deux

Une maladie touche 1 % de la population. Un test est positif chez 99 % des malades et chez 2 % des non-malades.

- Calculer $\mathbb{P}(M \mid +)$. Commenter.
- Vérifier par un tableau d'effectifs sur 10 000 personnes.
- Une personne positive refait un second test, indépendant du premier conditionnellement à son état. Calculer la probabilité d'être malade si le second test est aussi positif (partir de la probabilité trouvée en a) comme nouvel a priori).

d) Retrouver c) directement avec $\mathbb{P}(++ \mid M) = 0,99^2$ et $\mathbb{P}(++ \mid \overline{M}) = 0,02^2$.

Exercice 4 - Indépendance deux à deux, pas mutuelle

On lance deux pièces équilibrées. Soient A « la première donne pile », B « la seconde donne pile », C « les deux pièces donnent le même résultat ».

- Calculer $\mathbb{P}(A)$, $\mathbb{P}(B)$, $\mathbb{P}(C)$.
- Montrer que A , B , C sont indépendants deux à deux.
- Sont-ils mutuellement indépendants ?
- Interpréter : connaître A et B ensemble renseigne-t-il sur C ?

Exercice 5 - L'urne de Pólya

Une urne contient 1 boule rouge et 1 bleue. À chaque tirage, on remet la boule tirée **et** on ajoute une boule de la même couleur.

- Calculer la probabilité que le deuxième tirage donne rouge.
- Sachant que le deuxième tirage est rouge, quelle est la probabilité que le premier l'ait été ?
- Montrer que la probabilité d'obtenir rouge aux n premiers tirages vaut $\frac{1}{n+1}$.
- Les tirages sont-ils indépendants ? Comparer $\mathbb{P}(R_1 \cap R_2)$ et $\mathbb{P}(R_1)\mathbb{P}(R_2)$.

Exercice 6 - Chaîne à deux états : la météo

S'il fait beau un jour, il fait beau le lendemain avec probabilité 0,8 ; s'il pleut, il fait beau le lendemain avec probabilité 0,4. On note p_n la probabilité qu'il fasse beau le jour n .

- Montrer que $p_{n+1} = 0,4 p_n + 0,4$.
- Déterminer le point fixe ℓ et exprimer p_n en fonction de p_0 et n .
- Quelle est la limite de p_n ? Dépend-elle de p_0 ?
- Il fait beau aujourd'hui ($p_0 = 1$) : à partir de quel jour $|p_n - \ell| < 10^{-3}$?

Exercice 7 - Fiabilité d'un système

Chaque composant fonctionne avec probabilité 0,9, indépendamment des autres.

- Trois composants **en série** (le système marche si tous marchent) : fiabilité ?
- Trois composants **en parallèle** (il suffit d'un seul) : fiabilité ?
- Un composant A en série avec un bloc de deux composants B , C en parallèle : fiabilité ?
- Combien de composants en parallèle faut-il pour une fiabilité d'au moins 0,999 999 ?

Exercice 8 - La ruine du joueur

Un joueur possède k euros ($0 \leq k \leq 3$) et joue des parties à 1 euro, gagnées avec probabilité p , perdues avec probabilité $q = 1 - p$. Il s'arrête à 0 (ruine) ou à 3 euros (objectif). Soit P_k la probabilité d'atteindre 3.

- Justifier $P_0 = 0$, $P_3 = 1$ et $P_k = pP_{k+1} + qP_{k-1}$ pour $k = 1, 2$.
- Résoudre pour $p = \frac{1}{2}$.
- Résoudre pour $p = \frac{2}{3}$.
- Vérifier que pour $p = \frac{2}{3}$ la formule $P_k = \frac{1 - r^k}{1 - r^3}$, $r = \frac{q}{p}$, redonne c).

Exercice 9 - Les paris du chevalier de Méré

- Probabilité d'obtenir au moins un six en 4 lancers d'un dé.
- Probabilité d'obtenir au moins un double six en 24 lancers de deux dés.
- Le chevalier pensait les deux paris équivalents (« $4/6 = 24/36$ »). Expliquer l'erreur.
- Combien de lancers de deux dés faut-il pour que le pari du double six soit favorable ?

Exercice 10 - Pièce piégée et observations successives

Une boîte contient deux pièces équilibrées et une pièce à deux faces « pile ». On en prend une au hasard et on la lance trois fois : on obtient trois piles.

- Calculer la probabilité que ce soit la pièce piégée.
- Calculer la probabilité que le quatrième lancer donne pile.
- Refaire a) en mettant à jour la probabilité après **chaque** lancer (Bayes séquentiel).
- Combien de piles consécutifs faut-il observer pour être sûr à 99 % d'avoir la pièce piégée ?

Exercice 11 - Le paradoxe de Simpson

Deux traitements A et B des calculs rénaux donnent les taux de succès suivants (succès / patients).

Calculs	Traitement A	Traitement B
petits	81 / 87	234 / 270
gros	192 / 263	55 / 80

- Pour chaque taille de calcul, quel traitement réussit le mieux ?
- Calculer les taux de succès globaux de A et B ; quel traitement semble le meilleur ?
- Expliquer la contradiction à l'aide de la formule des probabilités totales $\mathbb{P}(S) = \mathbb{P}(\text{petit})\mathbb{P}(S \mid \text{petit}) + \mathbb{P}(\text{gros})\mathbb{P}(S \mid \text{gros})$.
- Quel traitement recommander ?

Exercice 12 - Dés non transitifs

Trois dés ont pour faces $A = (2, 2, 4, 4, 9, 9)$, $B = (1, 1, 6, 6, 8, 8)$, $C = (3, 3, 5, 5, 7, 7)$. Deux joueurs lancent chacun un dé ; le plus grand résultat gagne.

- Calculer $\mathbb{P}(A > B)$ en dénombrant les 36 couples (ou par probabilités totales sur la face de A).
- Calculer $\mathbb{P}(B > C)$ et $\mathbb{P}(C > A)$.
- Commenter : la relation « est plus fort que » est-elle transitive ?
- Vous jouez contre un adversaire qui choisit son dé en premier : quelle stratégie adopter ?

Exercice 13 - Tirages sans remise et symétrie

Une urne contient 3 boules rouges et 5 bleues ; on les tire toutes, une par une, sans remise.

- Calculer la probabilité que la deuxième boule soit rouge (probabilités totales).
- Montrer que, pour tout k , la k -ième boule est rouge avec probabilité $\frac{3}{8}$ (argument de symétrie sur les ordres).
- Calculer $\mathbb{P}(R_2 | R_1)$ et $\mathbb{P}(R_1 | R_2)$.
- Quelle est la probabilité que les trois rouges sortent en premier ? que la dernière boule soit rouge ?

Exercice 14 - Le problème des partis

Deux joueurs de même force jouent une série de parties ; le premier à 3 victoires emporte la mise de 64 euros. La série est interrompue au score de 2 à 1 pour le joueur A.

- Quelles sont les issues possibles si l'on avait continué ? (au plus deux parties)
- Calculer la probabilité que A l'aurait emporté.
- En déduire un partage équitable de la mise (solution de Pascal et Fermat).
- Même question au score de 2 à 0, puis de 1 à 0.

Exercice 15 - Synthèse : canal bruité et code à répétition

Un canal transmet des bits ; l'émetteur envoie 0 avec probabilité 0,6 et 1 avec probabilité 0,4. Chaque bit est inversé avec probabilité 0,1, indépendamment.

- Calculer la probabilité de recevoir 1.
- On reçoit 1 : probabilité que 1 ait été émis ?
- Pour fiabiliser, on envoie chaque bit 3 fois et on décode à la majorité. Calculer la probabilité d'erreur de décodage.
- Refaire b) avec ce code, pour la réception 111.