

Plaquette 2 - Dénombrement avancé : bijections, crible, identités

Dénombrement et probabilités — Licence 1 (L1)

Exercices

Méthode

Compter, c'est trouver une **bijection** avec un ensemble dont on connaît le cardinal : chemins $\leftrightarrow$ mots, parties $\leftrightarrow$ suites de 0 et de 1, répartitions $\leftrightarrow$ étoiles et barres. Quand les contraintes se chevauchent, on utilise le **crible** (inclusion-exclusion) ; quand on veut une identité, on compte **la même chose de deux façons**. On contrôle toujours une formule sur un petit cas qu'on peut énumérer à la main.

Exercice 1 - Chemins dans un quadrillage

On se déplace dans un quadrillage de $(0, 0)$ à $(5, 3)$ par pas unitaires vers la droite (D) ou vers le haut (H).

- Mettre les chemins en bijection avec des mots, et en déduire leur nombre.
- Combien de chemins passent par le point $(2, 1)$?
- Combien évitent ce point ?
- Généraliser : nombre de chemins de $(0, 0)$ à (a, b) , et justifier la relation de Pascal par le dernier pas.

Exercice 2 - Identité de Vandermonde

Un comité de p personnes est choisi dans un groupe de m femmes et n hommes.

- En comptant les comités selon le nombre k de femmes, démontrer

$$\sum_k \binom{m}{k} \binom{n}{p-k} = \binom{m+n}{p}.$$

- En déduire $\sum_{k=0}^n \binom{n}{k}^2 = \binom{2n}{n}$.

- Vérifier pour $n = 4$.

- Retrouver b) en identifiant le coefficient de x^n dans $(1+x)^n(1+x)^n$.

Exercice 3 - Compter les surjections par le crible

Soit $S(n)$ le nombre d'applications surjectives de $\{1, \dots, n\}$ sur $\{1, 2, 3\}$.

- On note A_i l'ensemble des applications qui **n'atteignent pas** i . Calculer $|A_i|$, $|A_i \cap A_j|$ et $|A_1 \cap A_2 \cap A_3|$.

- En déduire $S(n) = 3^n - 3 \cdot 2^n + 3$.

- Calculer $S(3)$, $S(4)$, $S(5)$; contrôler $S(3)$ directement.

- Application : de combien de façons répartir 5 exercices distincts entre 3 étudiants pour que chacun en ait au moins un ?

Exercice 4 - Dérangements

Un dérangement de $\{1, \dots, n\}$ est une permutation sans point fixe ; on note D_n leur nombre.

- Par le crible (avec $A_i =$ permutations fixant i), montrer que $D_n = n! \sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k}{k!}$.
- Calculer D_3, D_4, D_5 et vérifier D_3 en listant.
- n personnes déposent leur chapeau et en reprennent un au hasard : vers quoi tend la probabilité que personne ne retrouve le sien ?
- Vérifier la relation $D_n = (n-1)(D_{n-1} + D_{n-2})$ pour $n = 5$.

Exercice 5 - Étoiles et barres

On répartit 10 bonbons **identiques** entre 3 enfants.

- Mettre une répartition (x_1, x_2, x_3) en bijection avec une suite de 10 étoiles et 2 barres ; en déduire le nombre de répartitions.
- Même question si chaque enfant doit recevoir au moins un bonbon (poser $y_i = x_i - 1$).
- Combien de répartitions donnent au plus 5 bonbons à chaque enfant ? (crible sur « $x_i \geq 6$ »)
- Combien de tirages **sans ordre avec remise** de 3 boules parmi 10 numérotées ?

Exercice 6 - Parties et couples de parties

Soit E un ensemble à n éléments.

- Mettre $P(E)$ en bijection avec $\{0, 1\}^n$ et en déduire $|P(E)| = 2^n$.
- Combien y a-t-il de couples (A, B) de parties avec $A \subset B$? (Pour chaque x , trois cas.)
- Combien de couples (A, B) avec $A \cap B = \emptyset$? Et avec $A \cup B = E$?
- Vérifier b) pour $n = 2$ en listant, et retrouver b) par $\sum_k \binom{n}{k} 2^k$.

Exercice 7 - Crible à trois ensembles

On considère les entiers de 1 à 1000.

- Combien sont divisibles par 2 ? par 3 ? par 5 ?
- Combien sont divisibles par 6, 10, 15, 30 ?
- En déduire combien sont divisibles par au moins un des nombres 2, 3, 5.
- Combien sont premiers avec 30 ? Comparer à $1000 \times \frac{1}{2} \times \frac{2}{3} \times \frac{4}{5}$.

Exercice 8 - Triangles dans un polygone

On considère un décagone convexe (polygone à 10 sommets).

- Combien a-t-il de diagonales ?
- Combien de triangles ont leurs sommets parmi ceux du décagone ?
- Combien de ces triangles ont exactement deux côtés, exactement un côté communs

avec le décagone ?

d) En déduire le nombre de triangles n'ayant aucun côté commun avec le décagone, et vérifier la formule $\frac{n(n-4)(n-5)}{6}$.

Exercice 9 - Mains au poker

Une main est un ensemble de 5 cartes d'un jeu de 52 (13 hauteurs, 4 couleurs).

- Combien y a-t-il de mains ?
- Combien de mains contiennent exactement une paire (deux cartes de même hauteur, les trois autres de hauteurs différentes entre elles et de la paire) ?
- Combien de « full » (trois cartes d'une hauteur, deux d'une autre) ?
- Donner les probabilités correspondantes.

Exercice 10 - Mots sans lettres voisines

On forme des mots de longueur 8 avec les lettres a et b .

- Combien de mots contiennent exactement 3 fois la lettre a ?
- Combien de ces mots n'ont jamais deux a côte à côte ? (Placer les a dans les « trous » entre les b .)
- Généraliser : nombre de mots de longueur n à k lettres a non adjacentes.
- Application : de combien de façons choisir 3 jours de télétravail dans une période de 8 jours sans deux jours consécutifs ?

Exercice 11 - Sommes de coefficients binomiaux pondérées

- En comptant de deux façons les couples (comité, président du comité) dans un groupe de n personnes, montrer $\sum_{k=0}^n k \binom{n}{k} = n2^{n-1}$.
- Retrouver ce résultat en dérivant $(1+x)^n$.
- Montrer de même $\sum_{k=0}^n k(k-1) \binom{n}{k} = n(n-1)2^{n-2}$, puis en déduire $\sum k^2 \binom{n}{k}$.
- Vérifier pour $n = 4$.

Exercice 12 - Crosse de hockey et somme des carrés

- Démontrer $\sum_{k=r}^n \binom{k}{r} = \binom{n+1}{r+1}$ par récurrence sur n (relation de Pascal).
- Interpréter combinatoirement : choisir $r+1$ éléments de $\{1, \dots, n+1\}$ selon la valeur du plus grand.
- En écrivant $k^2 = 2\binom{k}{2} + \binom{k}{1}$, retrouver $\sum_{k=1}^n k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$.
- Même méthode pour $\sum_{k=1}^n k^3$ (on donne $k^3 = 6\binom{k}{3} + 6\binom{k}{2} + \binom{k}{1}$) ; vérifier pour $n = 3$.

Exercice 13 - Les quatre façons de tirer

Une urne contient 10 boules numérotées ; on en tire 3.

- Combien de résultats possibles pour un tirage **ordonné avec remise** ? **ordonné sans remise** ? **simultané** (sans ordre, sans remise) ?
- Combien pour un tirage **sans ordre avec remise** ? Justifier par les étoiles et barres.
- Dans le modèle ordonné avec remise (équiprobable), quelle est la probabilité que les trois numéros soient distincts ?
- Expliquer pourquoi le modèle « sans ordre avec remise » ne peut pas être muni de l'équiprobabilité pour décrire un tirage réel.

Exercice 14 - Compter des applications

Soient $E = \{1, \dots, p\}$ et $F = \{1, \dots, n\}$.

- Rappeler le nombre d'applications et d'injections de E dans F .
- Montrer que les applications **strictement croissantes** de E dans F sont en bijection avec les parties à p éléments de F ; les dénombrer.
- Montrer que $f \mapsto g$, avec $g(i) = f(i) + i - 1$, met en bijection les applications **croissantes** $E \rightarrow F$ et les strictement croissantes $E \rightarrow \{1, \dots, n + p - 1\}$; les dénombrer.
- Vérifier les quatre formules pour $p = 2$, $n = 3$ en listant.

Exercice 15 - Synthèse : chemins sous la diagonale et nombres de Catalan

On compte les chemins de $(0, 0)$ à (n, n) (pas D et H) qui ne passent **jamais strictement au-dessus** de la diagonale $y = x$ (« bons » chemins).

- Pour $n = 3$, lister les bons chemins sous forme de mots.
- Un mauvais chemin touche la droite $y = x + 1$. En symétrisant, par rapport à cette droite, la partie du chemin **avant** son premier contact, on obtient un chemin de $(-1, 1)$ à (n, n) . Montrer que c'est une bijection et compter les mauvais chemins.
- En déduire que le nombre de bons chemins est $C_n = \binom{2n}{n} - \binom{2n}{n+1} = \frac{1}{n+1} \binom{2n}{n}$.
- Calculer C_3 et C_4 , et vérifier C_3 avec a).