

Plaquette 5 – Problèmes de synthèse en probabilités

Dénombrement et probabilités — Licence 1 (L1)

Exercices

Méthode

Ces problèmes combinent tout le chapitre : dénombrement pour construire l'univers, conditionnement sur le **premier pas** pour écrire une équation, indicatrices et linéarité pour l'espérance, inégalités pour borner. Chaque résultat surprenant (attente de deux piles, stratégie de la secrétaire, paradoxe de Saint-Petersbourg) est **contrôlé** par une énumération sur un petit cas ou un raisonnement de fréquence.

Exercice 1 – Marche aléatoire sur une droite

Un pion part de 0 et fait à chaque seconde un pas $+1$ ou -1 avec probabilité $\frac{1}{2}$, indépendamment. S_n est sa position après n pas.

- Écrire $S_n = X_1 + \dots + X_n$ et calculer $\mathbb{E}(S_n)$ et $V(S_n)$.
- Montrer que $S_n = 2B_n - n$ où $B_n \sim B(n, \frac{1}{2})$ compte les pas $+1$; en déduire $\mathbb{P}(S_{2n} = 0)$.
- Calculer $\mathbb{P}(S_4 = 0)$ et $\mathbb{P}(S_6 = 0)$.
- Majorer $\mathbb{P}(|S_{100}| \geq 30)$ par Bienaymé-Tchebychev.

Exercice 2 – Attendre PP ou PF

On lance une pièce équilibrée jusqu'à voir apparaître un motif donné sur deux lancers consécutifs.

- Motif PF : justifier que le temps d'attente est la somme de deux temps géométriques de paramètre $\frac{1}{2}$; en déduire son espérance.
- Motif PP : on note e_0 l'espérance du temps restant sans pile « en cours » et e_1 celle quand le dernier lancer est pile. Établir $e_0 = 1 + \frac{1}{2}e_1 + \frac{1}{2}e_0$ et $e_1 = 1 + \frac{1}{2}e_0$.
- Résoudre et comparer les deux motifs.
- Expliquer intuitivement la différence, alors que chaque motif a la probabilité $\frac{1}{4}$ d'apparaître à un endroit donné.

Exercice 3 – Approximation de Poisson

Un fichier de 100 lignes contient des erreurs indépendantes, chaque ligne étant erronée avec probabilité 0,02. X est le nombre de lignes erronées.

- Quelle est la loi de X ? Calculer $\mathbb{P}(X = 0)$ et $\mathbb{P}(X = 1)$ (on donne $0,98^{100} \approx 0,1326$).
- Comparer avec la loi de Poisson de paramètre $\lambda = 2$ ($e^{-2} \approx 0,1353$).
- Justifier l'approximation : montrer que $\left(1 - \frac{\lambda}{n}\right)^n \rightarrow e^{-\lambda}$.
- Avec l'approximation, estimer la probabilité d'au moins 3 erreurs.

Exercice 4 – Duel alterné

Deux tireurs A et B tirent à tour de rôle sur une cible, A commence. A touche avec probabilité $\frac{1}{2}$, B avec probabilité $\frac{1}{3}$; le premier qui touche gagne.

- Calculer la probabilité que A gagne à son k -ième tir.
- En déduire $\mathbb{P}(A \text{ gagne})$ par une série géométrique.
- Retrouver ce résultat par l'analyse au premier tour : $p = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \times \frac{2}{3} p$.
- Quelle probabilité de réussite B devrait-il avoir pour que le duel soit équitable ?

Exercice 5 – Position du premier as

On retourne une à une les cartes d'un jeu de 32 cartes bien mélangé (4 as). X est le rang du premier as.

- Montrer que $\mathbb{P}(X > k) = \frac{\binom{32-k}{4}}{\binom{32}{4}}$ pour $0 \leq k \leq 28$.
- Calculer $\mathbb{P}(X = 1)$ et $\mathbb{P}(X > 10)$.
- À l'aide de $\mathbb{E}(X) = \sum_{k \geq 0} \mathbb{P}(X > k)$ et de la crosse de hockey, montrer que $\mathbb{E}(X) = \frac{33}{5}$.
- Généraliser : N cartes dont r as, $\mathbb{E}(X) = \frac{N+1}{r+1}$. Interpréter.

Exercice 6 – Records d'une permutation aléatoire

On range n personnes de tailles distinctes dans un ordre aléatoire uniforme. La personne en position k est un **record** si elle est plus grande que toutes les précédentes. R_n est le nombre de records.

- Montrer que la position k est un record avec probabilité $\frac{1}{k}$.
- En déduire $\mathbb{E}(R_n) = 1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n}$.
- Vérifier pour $n = 3$ en listant les 6 ordres.
- Les événements « k est un record » sont en fait indépendants. En déduire $V(R_n)$ et la calculer pour $n = 3$.

Exercice 7 – Le problème de la secrétaire

n candidats de valeurs distinctes se présentent dans un ordre aléatoire ; après chaque entretien, on embauche ou on refuse définitivement. Stratégie S_k : refuser les k premiers, puis embaucher le premier meilleur que tous les précédents (le dernier par défaut).

- Pour $n = 3$, $k = 0$: probabilité d'embaucher le meilleur ?
- Pour $n = 3$, $k = 1$: lister les 6 ordres et montrer que la probabilité vaut $\frac{1}{2}$.
- Pour $n = 4$, on admet $\mathbb{P}(S_1) = \frac{11}{24}$ et $\mathbb{P}(S_2) = \frac{5}{12}$. Quelle stratégie choisir ?
- Pour n grand, la meilleure stratégie consiste à refuser environ $\frac{n}{e}$ candidats et réussit avec probabilité $\approx \frac{1}{e}$. Interpréter.

Exercice 8 – Fixer une prime d'assurance

Un assureur couvre 1000 clients indépendants ; chacun a un sinistre dans l'année avec probabilité 0,01, qui coûte alors 10 000 euros. N est le nombre de sinistres.

- Loi, espérance et variance de N ; coût moyen par client (« prime pure »).
- À l'aide de Bienaymé-Tchebychev, trouver a tel que $\mathbb{P}(N \geq 10 + a) \leq 0,05$.
- En déduire une prime par client garantissant, avec probabilité au moins 0,95, que les primes couvrent les sinistres.
- Que devient la prime si l'assureur a 100 000 clients ? Commenter (mutualisation).

Exercice 9 – Le modèle d'Ehrenfest à deux boules

Deux boules sont réparties entre deux urnes. À chaque étape, on choisit une des deux boules au hasard et on la change d'urne. $X_n \in \{0, 1, 2\}$ est le nombre de boules dans l'urne A.

- Écrire la matrice de transition P ($P_{ij} = \mathbb{P}(X_{n+1} = j \mid X_n = i)$).
- Déterminer la loi stationnaire π ($\pi P = \pi$, $\pi_0 + \pi_1 + \pi_2 = 1$) et la reconnaître.
- Partant de $X_0 = 0$, donner la loi de X_n pour n pair et n impair. La loi de X_n converge-t-elle ?
- Montrer que la moyenne des lois aux instants n et $n + 1$ vaut π pour tout $n \geq 1$.

Exercice 10 – Sondage et taille d'échantillon

Dans une population, une proportion inconnue p vote « oui ». On interroge n personnes au hasard (tirages indépendants) ; F_n est la fréquence de « oui ».

- Montrer que $V(F_n) = \frac{p(1-p)}{n} \leq \frac{1}{4n}$.
- Avec $n = 400$, majorer $\mathbb{P}(|F_n - p| \geq 0,1)$.
- Quelle taille n garantit par Bienaymé-Tchebychev une erreur inférieure à 0,03 avec probabilité au moins 0,95 ?
- Les instituts utilisent plutôt $n \approx 1100$ pour cette précision : d'où vient l'écart ?

Exercice 11 – Le paradoxe du duc de Toscane

On lance trois dés. Le duc remarquait que la somme 10 sort plus souvent que la somme 9, bien que chacune s'écrive de six façons comme somme de trois entiers de 1 à 6.

- Lister les décompositions (sans ordre) de 9 et de 10.
- Compter le nombre de triplets **ordonnés** correspondant à chaque décomposition.
- En déduire $\mathbb{P}(S = 9)$ et $\mathbb{P}(S = 10)$.
- Expliquer l'erreur du raisonnement « six façons chacune ».

Exercice 12 – Anniversaires : compter les paires

Dans un groupe de n personnes (anniversaires uniformes et indépendants sur 365 jours), X est le nombre de **paires** de personnes ayant le même anniversaire.

- a) Calculer $\mathbb{E}(X)$ à l'aide d'indicatrices.
- b) Calculer $\mathbb{E}(X)$ pour $n = 23$.
- c) Par l'inégalité de Markov, majorer $\mathbb{P}(X \geq 1)$; comparer avec la valeur exacte $\approx 0,507$.
- d) Pour quelle valeur de n a-t-on $\mathbb{E}(X) \geq 1$?

Exercice 13 - Le paradoxe de Saint-Petersbourg

On lance une pièce jusqu'au premier pile, au plus m fois. Si le premier pile apparaît au lancer $k \leq m$, on gagne 2^k euros ; si aucun pile n'apparaît, on ne gagne rien.

- a) Calculer l'espérance du gain G_m .
- b) Que se passe-t-il quand $m \rightarrow +\infty$? Quel prix serait « équitable » pour jouer au jeu sans limite ?
- c) Calculer $\mathbb{P}(G_m \geq 64)$ pour $m \geq 6$.
- d) La banque ne peut payer plus de 2^{20} euros (environ un million) : montrer que l'espérance réelle n'est que de 20 euros. Commenter.

Exercice 14 - Un dé, puis des pièces

On lance un dé ; s'il donne N , on lance N pièces équilibrées ; X est le nombre de piles obtenus.

- a) Déterminer la loi conditionnelle de X sachant $N = n$.
- b) Calculer $\mathbb{P}(X = 0)$ par les probabilités totales.
- c) Calculer $\mathbb{E}(X)$ en conditionnant par N (formule $\mathbb{E}(X) = \sum_n \mathbb{P}(N = n) \mathbb{E}(X | N = n)$).
- d) Calculer $\mathbb{P}(N = 6 | X = 6)$ et $\mathbb{P}(N = 1 | X = 0)$.

Exercice 15 - Synthèse : dépistage groupé (méthode de Dorfman)

Pour dépister une infection de prévalence $p = 0,01$ dans une grande population, on mélange les prélèvements par groupes de k personnes : si le mélange est négatif, les k personnes sont déclarées saines (un seul test) ; sinon, on les teste toutes individuellement ($k + 1$ tests au total).

- a) Calculer la probabilité qu'un groupe soit négatif.
- b) Montrer que le nombre moyen de tests **par personne** vaut $f(k) = \frac{1}{k} + 1 - (1 - p)^k$.
- c) Calculer $f(5)$, $f(10)$, $f(11)$, $f(15)$ (on donne $0,99^5 \approx 0,9510$, $0,99^{10} \approx 0,9044$, $0,99^{11} \approx 0,8953$, $0,99^{15} \approx 0,8601$). Quelle taille de groupe choisir ?
- d) Quelle économie réalise-t-on par rapport au test individuel ? La méthode reste-t-elle intéressante pour $p = 0,3$?