

Plaquette 4 – Variables aléatoires : lois, espérance, variance

Dénombrement et probabilités — Licence 1 (L1)

Exercices

Méthode

Pour étudier une variable aléatoire, on commence par sa **loi** (valeurs et probabilités, somme égale à 1), puis on calcule espérance et variance — ou, bien souvent, on **évite** la loi : la linéarité de l'espérance appliquée à une somme d'**indicateurs** donne l'espérance sans rien savoir des dépendances. Les inégalités de Markov et de Bienaymé-Tchebychev bornent les écarts sans connaître la loi exacte.

Exercice 1 – Somme de deux dés

On lance deux dés équilibrés ; S est la somme.

- Déterminer la loi de S (on pourra montrer que $\mathbb{P}(S = s) = \frac{6 - |s - 7|}{36}$).
- Calculer $\mathbb{E}(S)$ de deux façons.
- Calculer $V(S)$ en utilisant l'indépendance.
- Quelle est la probabilité que S s'écarte de plus de 3 de sa moyenne ? Comparer à la borne de Bienaymé-Tchebychev.

Exercice 2 – Le maximum de deux dés

On lance deux dés ; M est le plus grand des deux résultats.

- Calculer $\mathbb{P}(M \leq k)$ pour $k \in \llbracket 1, 6 \rrbracket$.
- En déduire $\mathbb{P}(M = k) = \frac{2k - 1}{36}$.
- Calculer $\mathbb{E}(M)$ par la définition.
- Retrouver $\mathbb{E}(M)$ par la formule $\mathbb{E}(M) = \sum_{k \geq 1} \mathbb{P}(M \geq k)$.

Exercice 3 – Contrôle de qualité : loi hypergéométrique

Un lot de 20 pièces contient 4 pièces défectueuses. On prélève 5 pièces simultanément ; X est le nombre de défectueuses.

- Donner la loi de X et calculer $\mathbb{P}(X = 0)$.
- Calculer $\mathbb{E}(X)$ par les indicateurs.
- La variance vaut $np(1 - p)\frac{N - n}{N - 1}$; la calculer et la comparer à celle d'une binomiale $B(5; 0,2)$.
- On accepte le lot si l'échantillon ne contient aucune pièce défectueuse. Quelle est la probabilité d'accepter à tort ce lot à 20 % de défauts ?

Exercice 4 – Points fixes d'une permutation aléatoire

On choisit une permutation σ de $\llbracket 1, n \rrbracket$ uniformément ($n \geq 2$) ; X est son nombre de points fixes.

- a) Écrire $X = \sum_{i=1}^n 1_{A_i}$ avec $A_i = \{\sigma(i) = i\}$ et calculer $\mathbb{E}(X)$.
- b) Calculer $\mathbb{P}(A_i \cap A_j)$ pour $i \neq j$, puis $\mathbb{E}(X^2)$ et $V(X)$.
- c) Vérifier pour $n = 3$ en listant les 6 permutations.
- d) Commenter : ces résultats dépendent-ils de n ?

Exercice 5 - Covariance d'un dé et de la somme

On lance deux dés ; X est le premier résultat, Y le second, $S = X + Y$.

- a) Calculer $\text{Cov}(X, S)$ par bilinéarité.
- b) En déduire le coefficient de corrélation $\rho = \frac{\text{Cov}(X, S)}{\sigma(X)\sigma(S)}$.
- c) Calculer $\text{Cov}(X + Y, X - Y)$; S et $D = X - Y$ sont-elles indépendantes ?
- d) Vérifier la formule $V(S) = V(X) + V(Y) + 2\text{Cov}(X, Y)$.

Exercice 6 - Bienaymé-Tchebychev et pile ou face

On lance n fois une pièce équilibrée ; X est le nombre de piles et $F = \frac{X}{n}$ la fréquence.

- a) Donner $\mathbb{E}(F)$ et $V(F)$.
- b) Pour $n = 100$, majorer $\mathbb{P}(|X - 50| \geq 10)$ par Bienaymé-Tchebychev ; la valeur exacte est $\approx 0,057$. Commenter.
- c) Quel n garantit, par cette inégalité, $\mathbb{P}(|F - \frac{1}{2}| \geq 0,05) \leq 0,05$?
- d) En déduire la loi faible des grands nombres pour ce cas : $\mathbb{P}(|F - \frac{1}{2}| \geq \varepsilon) \rightarrow 0$.

Exercice 7 - Valeur la plus probable d'une binomiale

Soit $X \sim B(n, p)$ avec $0 < p < 1$ et $q = 1 - p$.

- a) Montrer que $\frac{\mathbb{P}(X = k + 1)}{\mathbb{P}(X = k)} = \frac{(n - k)p}{(k + 1)q}$.
- b) En déduire que $k \mapsto \mathbb{P}(X = k)$ croît tant que $k < (n + 1)p - 1$, puis décroît.
- c) Déterminer le mode de $B(10; 0,3)$ et vérifier numériquement (on donne $\mathbb{P}(X = 2) \approx 0,234$, $\mathbb{P}(X = 3) \approx 0,267$, $\mathbb{P}(X = 4) \approx 0,200$).
- d) Que se passe-t-il si $(n + 1)p$ est entier ?

Exercice 8 - Le collectionneur de vignettes

Chaque paquet contient une vignette parmi n modèles équiprobables. T est le nombre de paquets nécessaires pour avoir tous les modèles.

- a) Écrire $T = T_1 + T_2 + \dots + T_n$, où T_k est le nombre de paquets pour passer de $k - 1$ à k modèles différents. Quelle est la loi de T_k ?
- b) En déduire $\mathbb{E}(T) = n \left(1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n} \right)$.
- c) Calculer $\mathbb{E}(T)$ pour $n = 3$ et pour les 6 faces d'un dé.
- d) Donner un équivalent de $\mathbb{E}(T)$ quand $n \rightarrow +\infty$.

Exercice 9 - Fonction génératrice

Pour X à valeurs dans $\llbracket 0, n \rrbracket$, on pose $G_X(s) = \mathbb{E}(s^X) = \sum_k \mathbb{P}(X = k)s^k$.

- Calculer G_X pour $X \sim B(p)$ (Bernoulli) et $X \sim B(n, p)$.
- Montrer que $G_X'(1) = \mathbb{E}(X)$ et $G_X''(1) = \mathbb{E}(X(X-1))$; en déduire la variance de $B(n, p)$.
- Si X et Y sont indépendantes, montrer que $G_{X+Y} = G_X G_Y$.
- En déduire la loi de $X + Y$ pour $X \sim B(m, p)$ et $Y \sim B(n, p)$ indépendantes.

Exercice 10 - Inégalité de Markov

Soit X une variable aléatoire **positive**.

- Démontrer que $a \mathbb{1}_{\{X \geq a\}} \leq X$ pour $a > 0$, et en déduire $\mathbb{P}(X \geq a) \leq \frac{\mathbb{E}(X)}{a}$.
- Le salaire moyen d'une entreprise est 2000 euros. Majorer la proportion de salariés gagnant au moins 10 000 euros.
- Montrer que l'inégalité est optimale : trouver une variable avec $\mathbb{E}(X) = 1$ et $\mathbb{P}(X \geq 5) = \frac{1}{5}$.
- Retrouver Bienaymé-Tchebychev en appliquant Markov à $(X - \mathbb{E}(X))^2$.

Exercice 11 - Espérance de gain à la roulette

Une roulette a 37 cases : 18 rouges, 18 noires, le zéro (vert). Miser 1 euro sur « rouge » rapporte 1 euro de gain net si le rouge sort, sinon on perd la mise.

- Déterminer la loi du gain G , son espérance et sa variance.
- Un joueur fait 100 mises indépendantes de 1 euro. Espérance et écart type du gain total ?
- Miser 1 euro sur un numéro plein rapporte 35 euros nets. Comparer l'espérance et la variance à celles du pari sur rouge.
- Peut-on, en combinant les paris, obtenir une espérance positive ?

Exercice 12 - Centrer et réduire

Soit X une variable d'espérance 5 et de variance 4.

- Calculer $\mathbb{E}(X^2)$ et $\mathbb{E}((X-3)^2)$.
- Déterminer a, b tels que $Y = aX + b$ vérifie $\mathbb{E}(Y) = 0$ et $V(Y) = 1$ ($a > 0$).
- Montrer que $t \mapsto \mathbb{E}((X-t)^2)$ est minimale en $t = \mathbb{E}(X)$ et donner le minimum.
- On suppose de plus X à valeurs dans $[0, 10]$. Montrer que $V(X) \leq 25$ et donner une loi réalisant l'égalité.

Exercice 13 - Covariance nulle sans indépendance

Soit X uniforme sur $\{-1, 0, 1\}$ et $Y = X^2$.

- Déterminer la loi de Y .
- Calculer $\text{Cov}(X, Y)$.

c) X et Y sont-elles indépendantes ?

d) Soient maintenant U, V indépendantes uniformes sur $\{1, 2, 3\}$: calculer $\mathbb{E}(UV)$ et vérifier que $\text{Cov}(U, V) = 0$.

Exercice 14 – Espérance par les queues de loi

Soit X à valeurs dans $\llbracket 0, n \rrbracket$.

a) Montrer que $\mathbb{E}(X) = \sum_{k=1}^n \mathbb{P}(X \geq k)$ (écrire $X = \sum_{k=1}^n 1_{\{X \geq k\}}$).

b) Application : X est le minimum de deux dés. Calculer $\mathbb{P}(X \geq k)$ puis $\mathbb{E}(X)$.

c) Vérifier que $\mathbb{E}(\min) + \mathbb{E}(\max) = 7$ (utiliser l'exercice 2) et expliquer.

d) Pour $X \sim G(p)$ (valeurs dans $\mathbb{N}^*$), retrouver $\mathbb{E}(X) = \frac{1}{p}$ par la même formule étendue aux séries.

Exercice 15 – Synthèse : boîtes vides

On lance n boules au hasard dans n boîtes (chaque boule indépendamment, uniformément). V est le nombre de boîtes vides.

a) Écrire $V = \sum_{i=1}^n 1_{B_i}$ (B_i : « la boîte i est vide ») et calculer $\mathbb{E}(V)$.

b) Vérifier pour $n = 3$ en déterminant la loi de V (on dénombre les 27 répartitions).

c) Calculer $V(V)$ pour $n = 3$ à partir des indicatrices ($\mathbb{P}(B_i \cap B_j)$ pour $i \neq j$), et contrôler avec la loi.

d) Montrer que $\frac{\mathbb{E}(V)}{n} \rightarrow \frac{1}{e}$ quand $n \rightarrow +\infty$.