

Dénombrement et probabilités — L1

Fiche de révision — formules, méthodes et pièges

1. Cardinaux et principes

$$|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|, \quad |E \times F| = |E| |F|.$$

Principe multiplicatif : n_1 choix, puis n_2 , etc. $\Rightarrow n_1 \cdots n_p$ possibilités.

Si $|E| = p$, $|F| = n$, nombre d'applications $E \rightarrow F$:

$$n^p.$$

2. Quel dénombrement ?

Situation	Nombre
p choix ordonnés, répétition	n^p
p choix ordonnés, sans répétition	$A_n^p = \frac{n!}{(n-p)!}$
p choix non ordonnés	$\binom{n}{p} = \frac{n!}{p!(n-p)!}$
Permutation	$n!$

Question réflexe : deux résultats qui ne diffèrent que par l'ordre sont-ils identiques ?

3. Combinaisons

$$\binom{n}{p} = \binom{n}{n-p}, \quad \binom{n}{p} = \binom{n-1}{p} + \binom{n-1}{p-1}.$$

Binôme de Newton :

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a^{n-k} b^k.$$

4. Probabilités finies

$$\mathbb{P}(\Omega) = 1, \quad \mathbb{P}(A^c) = 1 - \mathbb{P}(A),$$

$$\mathbb{P}(A \cup B) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) - \mathbb{P}(A \cap B).$$

Sous **équiprobabilité** :

$$\mathbb{P}(A) = \frac{|A|}{|\Omega|}.$$

Ne jamais utiliser cette formule sans justifier l'équiprobabilité.

5. Conditionnement

Si $\mathbb{P}(B) > 0$:

$$\mathbb{P}(A | B) = \frac{\mathbb{P}(A \cap B)}{\mathbb{P}(B)}$$

Donc

$$\mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(B) \mathbb{P}(A | B).$$

Chaîne :

$$\mathbb{P}(A \cap B \cap C) = \mathbb{P}(A) \mathbb{P}(B | A) \mathbb{P}(C | A \cap B).$$

6. Probabilités totales et Bayes

Si (B_i) est un système complet :

$$\mathbb{P}(A) = \sum_i \mathbb{P}(B_i) \mathbb{P}(A | B_i).$$

Bayes :

$$\mathbb{P}(B_j | A) = \frac{\mathbb{P}(B_j) \mathbb{P}(A | B_j)}{\mathbb{P}(A)}.$$

Remplacer $\mathbb{P}(A)$ par la formule des probabilités totales si nécessaire.

7. Indépendance

$$A \perp B \iff \mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(A) \mathbb{P}(B).$$

Si $\mathbb{P}(B) > 0$: $A \perp B \iff \mathbb{P}(A | B) = \mathbb{P}(A)$.

Attention : indépendance $\neq$ incompatibilité.

8. Variable aléatoire finie

Si X prend les valeurs $x_1, \dots, x_r$ avec probabilités p_i :

$$\sum_i p_i = 1, \quad \mathbb{E}(X) = \sum_i x_i p_i.$$

$$\text{Var}(X) = \mathbb{E}(X^2) - \mathbb{E}(X)^2, \quad \sigma(X) = \sqrt{\text{Var}(X)}.$$

$$\mathbb{E}(aX + b) = a\mathbb{E}(X) + b, \quad \text{Var}(aX + b) = a^2 \text{Var}(X).$$

9. Bernoulli et binomiale

$X \sim \mathcal{B}(1, p)$:

$$\mathbb{E}(X) = p, \quad \text{Var}(X) = p(1-p).$$

Pour n épreuves **indépendantes**, même probabilité de succès p :

$$X \sim \mathcal{B}(n, p),$$

$$\mathbb{P}(X = k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}.$$

$$\mathbb{E}(X) = np, \quad \text{Var}(X) = np(1-p).$$

10. Méthode express

1. Décrire précisément les issues.
2. Décider : ordre ? répétition ?
3. Choisir n^p , A_n^p , $\binom{n}{p}$ ou $n!$.
4. En probabilité : vérifier l'équiprobabilité.
5. Informations successives $\Rightarrow$ conditionnement.
6. Plusieurs causes $\Rightarrow$ probabilités totales.
7. Effet observé $\rightarrow$ cause $\Rightarrow$ Bayes.
8. Variable aléatoire $\Rightarrow$ écrire sa loi avant $\mathbb{E}$ et Var .

11. Pièges à éviter

- Arrangement alors que l'ordre ne compte pas.
- “favorables / possibles” sans équiprobabilité.
- Confondre $\mathbb{P}(A | B)$ et $\mathbb{P}(B | A)$.
- Confondre indépendance et incompatibilité.
- Loi binomiale sans indépendance ni probabilité constante.
- Oublier que $\text{Var}(X) = \mathbb{E}(X^2) - \mathbb{E}(X)^2$.

12. Mini-exemples

Équipe de 3 parmi 10 : $\binom{10}{3} = 120$.

Trois rôles distincts parmi 10 : $A_{10}^3 = 720$.

Deux rouges sans remise, urne 4R/6B :

$$\mathbb{P}(RR) = \frac{4}{10} \frac{3}{9} = \frac{2}{15}.$$

Bayes : toujours écrire d'abord le dénominateur avec les probabilités totales.

Dénombrement et probabilités — L1

Fiche de révision — réflexes de résolution

A. Décider si l'ordre compte

Comparer deux résultats qui ne diffèrent que par une permutation.

— Même résultat $\Rightarrow$ combinaison.

— Résultat différent $\Rightarrow$ liste ou arrangement.

Exemple : un comité $\{A, B, C\}$ est le même que $\{C, A, B\}$; un podium (A, B, C) n'est pas le même que (C, A, B) .

B. Complémentaire

Pour compter ou calculer une probabilité, “au moins un” est souvent plus simple par le complémentaire :

$$\mathbb{P}(A) = 1 - \mathbb{P}(A^c).$$

Exemple : avec n essais indépendants de succès p ,

$$\mathbb{P}(\text{au moins un succès}) = 1 - (1 - p)^n.$$

C. Tirages : avec ou sans remise

Avec remise : la composition ne change pas ; les tirages peuvent être indépendants.

Sans remise : la composition change ; les probabilités conditionnelles changent d'un tirage au suivant.

D. Arbre pondéré : règles

Sur un arbre de probabilités :

— somme des probabilités sortant d'un même nœud = 1 ;

— probabilité d'un chemin = produit des probabilités de ses branches ;

— événement réalisé par plusieurs chemins disjoints = somme des probabilités des chemins.

E. Bayes : schéma mental

Si C est une cause et T un résultat observé :

$$\mathbb{P}(C | T) = \frac{\mathbb{P}(C)\mathbb{P}(T | C)}{\mathbb{P}(T)}.$$

Le dénominateur est la probabilité totale du résultat observé. Bayes **inverse le conditionnement**, il ne permet pas d'échanger directement C et T .

F. Loi d'une variable aléatoire

Tableau-type :

$$\begin{array}{c|cccc} x & x_1 & x_2 & \cdots & x_r \\ \hline \mathbb{P}(X = x) & p_1 & p_2 & \cdots & p_r \end{array}$$

Toujours vérifier $p_i \geq 0$ et $\sum_i p_i = 1$ avant de calculer l'espérance.

G. Calcul rapide de la variance

Souvent plus efficace :

$$\text{Var}(X) = \mathbb{E}(X^2) - \mathbb{E}(X)^2$$

avec

$$\mathbb{E}(X^2) = \sum_i x_i^2 p_i.$$

La variance est toujours ≥ 0 et possède l'unité au carré ; l'écart-type retrouve l'unité de X .

H. Formule binomiale : reconnaître le cadre

Il faut simultanément :

1. un nombre fixé n d'épreuves ;
2. deux issues : succès/échec ;
3. mêmes probabilités p et $1 - p$;
4. indépendance des épreuves ;
5. X = nombre de succès.

Alors seulement $X \sim \mathcal{B}(n, p)$.

I. Contrôles de cohérence

Avant de rendre :

- une probabilité doit être dans $[0, 1]$;
- les probabilités d'une loi doivent sommer à 1 ;
- $\binom{n}{p} \leq 2^n$;
- $\text{Var}(X) \geq 0$;
- dans A_n^p , il faut $p \leq n$;
- dans un problème d'équiprobabilité, numérateur $\leq$ dénominateur.

J. Formules à savoir par cœur

$$A_n^p = \frac{n!}{(n-p)!}, \quad \binom{n}{p} = \frac{n!}{p!(n-p)!},$$

$$\mathbb{P}(A | B) = \frac{\mathbb{P}(A \cap B)}{\mathbb{P}(B)},$$

$$\mathbb{P}(A) = \sum_i \mathbb{P}(B_i) \mathbb{P}(A | B_i),$$

$$\mathbb{P}(B_j | A) = \frac{\mathbb{P}(B_j) \mathbb{P}(A | B_j)}{\mathbb{P}(A)},$$

$$\mathbb{E}(X) = \sum_i x_i p_i, \quad \text{Var}(X) = \mathbb{E}(X^2) - \mathbb{E}(X)^2.$$

K. Exemple complet éclair

Une urne contient 3 rouges et 2 bleues. On tire 2 boules sans remise. Probabilité d'avoir une de chaque couleur :

$$\frac{3}{5} \frac{2}{4} + \frac{2}{5} \frac{3}{4} = \frac{3}{5}.$$

En dénombrement équiprobable :

$$\frac{\binom{3}{1} \binom{2}{1}}{\binom{5}{2}} = \frac{6}{10} = \frac{3}{5}.$$

Deux méthodes correctes, même résultat.

L. Réflexe final

D'abord compter, ensuite probabiliser. Une formule de dénombrement choisie sur le mauvais modèle produit un résultat faux même si le calcul algébrique est parfait.