

Dénombrement et probabilités

Licence 1 (L1) — Cours complet

Cardinaux, arrangements, combinaisons, probabilités conditionnelles, Bayes, variables aléatoires

Méthode — idée directrice

Avant de calculer une probabilité sur un univers fini, on identifie d'abord les issues et on les **compte**. La question décisive en dénombrement est toujours : *l'ordre compte-t-il ? les répétitions sont-elles autorisées ?*

1 Ensembles finis et cardinaux

Définition

Un ensemble E est **fini** s'il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que E possède exactement n éléments. On note alors

$$\text{Card}(E) = |E| = n.$$

Par convention, $|\emptyset| = 0$.

Pour deux ensembles finis A, B :

$$|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|.$$

Si $A \cap B = \emptyset$, alors $|A \cup B| = |A| + |B|$. Plus généralement, pour trois ensembles :

$$|A \cup B \cup C| = |A| + |B| + |C| - |A \cap B| - |A \cap C| - |B \cap C| + |A \cap B \cap C|.$$

Théorème — principe multiplicatif

Si une construction s'effectue en p étapes et si, à chaque étape k , il y a n_k choix possibles *indépendamment des choix précédents*, alors le nombre total de réalisations est

$$n_1 n_2 \cdots n_p.$$

En particulier, $|E \times F| = |E| |F|$.

Exemple

Un identifiant comporte deux lettres puis trois chiffres, avec répétition autorisée. Il y a

$$26^2 \times 10^3$$

identifiants possibles. On a multiplié les nombres de choix successifs.

2 Listes, applications, arrangements et permutations

Soient E et F deux ensembles finis, avec $|E| = p$ et $|F| = n$.

Théorème — nombre d'applications

Le nombre d'applications de E vers F est

$$n^p.$$

En effet, l'image de chacun des p éléments de E peut être choisie de n façons.

Une **p -liste** d'éléments d'un ensemble à n éléments est un p -uplet $(x_1, \dots, x_p)$. Si les répétitions sont autorisées, il existe n^p p -listes.

Si les répétitions sont interdites, on obtient un **arrangement** de p éléments parmi n :

$$A_n^p = n(n-1) \cdots (n-p+1) = \frac{n!}{(n-p)!}, \quad 0 \leq p \leq n.$$

Une permutation est un arrangement de tous les éléments :

$$A_n^n = n!.$$

Exemple

Parmi 10 étudiants, on attribue les rôles distincts de président, secrétaire et trésorier. L'ordre des rôles compte et une même personne ne peut occuper deux rôles :

$$A_{10}^3 = 10 \times 9 \times 8 = 720.$$

Piège classique

Ne pas confondre une sélection *ordonnée* et une sélection *non ordonnée*. Choisir Alice puis Bob n'est pas une nouvelle équipe par rapport à choisir Bob puis Alice si l'on forme simplement un binôme.

3 Combinaisons

Définition

Une **combinaison de p éléments parmi n** est une partie à p éléments d'un ensemble à n éléments. Le nombre de telles parties est

$$\binom{n}{p} = \frac{n!}{p!(n-p)!}, \quad 0 \leq p \leq n.$$

L'ordre ne compte pas et il n'y a pas de répétition.

On a les symétries

$$\binom{n}{p} = \binom{n}{n-p}, \quad \binom{n}{0} = \binom{n}{n} = 1.$$

Théorème — formule de Pascal

Pour $1 \leq p \leq n-1$,

$$\binom{n}{p} = \binom{n-1}{p} + \binom{n-1}{p-1}.$$

Preuve combinatoire. On fixe un élément a . Une partie de taille p contient a ou ne le contient pas. Il y en a respectivement $\binom{n-1}{p-1}$ et $\binom{n-1}{p}$.

Théorème — binôme de Newton

Pour tous $a, b \in \mathbb{K}$ et tout $n \in \mathbb{N}$,

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a^{n-k} b^k.$$

Exemple

Choisir une équipe de 4 personnes parmi 12 donne

$$\binom{12}{4} = 495.$$

Si les quatre rôles étaient distincts, il faudrait utiliser A_{12}^4 et non $\binom{12}{4}$.

Méthode — reconnaître le bon modèle

Situation	Répétition	Nombre
p choix ordonnés parmi n	autorisée	n^p
p choix ordonnés parmi n	interdite	$A_n^p = \frac{n!}{(n-p)!}$
p choix non ordonnés parmi n	interdite	$\binom{n}{p}$
Permutation de n objets	interdite	$n!$

Toujours décider d'abord si deux résultats qui diffèrent seulement par l'ordre doivent être considérés comme identiques.

4 Probabilités sur un univers fini

Soit Ω un univers fini. Un **événement** est une partie $A \subset \Omega$.

Définition

Une probabilité $\mathbb{P}$ sur Ω associe à chaque événement A un réel $\mathbb{P}(A)$ tel que :

$$\mathbb{P}(A) \geq 0, \quad \mathbb{P}(\Omega) = 1,$$

et, si $A \cap B = \emptyset$,

$$\mathbb{P}(A \cup B) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B).$$

Conséquences :

$$\mathbb{P}(\emptyset) = 0, \quad \mathbb{P}(A^c) = 1 - \mathbb{P}(A),$$

$$\mathbb{P}(A \cup B) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) - \mathbb{P}(A \cap B).$$

Théorème — équiprobabilité

Si les $|\Omega|$ issues sont équiprobables, alors pour tout $A \subset \Omega$,

$$\mathbb{P}(A) = \frac{|A|}{|\Omega|}.$$

Piège classique

La formule “cas favorables / cas possibles” n’est valable que lorsque les issues élémentaires sont équiprobables. Il faut donc justifier l’équiprobabilité avant de compter.

5 Probabilité conditionnelle et probabilités composées

Définition

Si $\mathbb{P}(B) > 0$, la probabilité de A sachant B est

$$\mathbb{P}(A \mid B) = \frac{\mathbb{P}(A \cap B)}{\mathbb{P}(B)}.$$

Ainsi,

$$\mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(B)\mathbb{P}(A \mid B).$$

La formule se prolonge à une chaîne d'événements : si les probabilités conditionnelles ont un sens,

$$\mathbb{P}(A_1 \cap \dots \cap A_n) = \mathbb{P}(A_1)\mathbb{P}(A_2 \mid A_1) \cdots \mathbb{P}(A_n \mid A_1 \cap \dots \cap A_{n-1}).$$

Exemple — tirages sans remise

Une urne contient 4 boules rouges et 6 bleues. On tire deux boules sans remise. La probabilité d'obtenir deux rouges vaut

$$\frac{4}{10} \times \frac{3}{9} = \frac{2}{15}.$$

La deuxième probabilité est conditionnelle au résultat du premier tirage.

6 Formule des probabilités totales

Définition

Une famille $(B_1, \dots, B_m)$ est un **système complet d'événements** si les B_i sont deux à deux disjoints, de probabilité non nulle, et

$$B_1 \cup \dots \cup B_m = \Omega.$$

Théorème — probabilités totales

Pour tout événement A ,

$$\mathbb{P}(A) = \sum_{i=1}^m \mathbb{P}(B_i)\mathbb{P}(A \mid B_i).$$

Cas particulier avec B et B^c :

$$\mathbb{P}(A) = \mathbb{P}(B)\mathbb{P}(A \mid B) + \mathbb{P}(B^c)\mathbb{P}(A \mid B^c).$$

7 Formule de Bayes

Théorème — Bayes

Avec (B_i) un système complet et $\mathbb{P}(A) > 0$,

$$\mathbb{P}(B_j \mid A) = \frac{\mathbb{P}(B_j)\mathbb{P}(A \mid B_j)}{\sum_{i=1}^m \mathbb{P}(B_i)\mathbb{P}(A \mid B_i)}.$$

Exemple — dépistage

Une maladie touche 1% d'une population. Un test est positif chez 99% des malades et chez 5% des non-malades. Si M = "malade" et $+$ = "test positif", alors

$$\mathbb{P}(M \mid +) = \frac{0.01 \times 0.99}{0.01 \times 0.99 + 0.99 \times 0.05} \approx 0.167.$$

Un test positif ne signifie donc pas ici "99% de chance d'être malade" : il faut tenir compte de la fréquence initiale

de la maladie.

8 Indépendance

Définition

Deux événements A et B sont **indépendants** si

$$\mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B).$$

Si $\mathbb{P}(B) > 0$, cela équivaut à $\mathbb{P}(A | B) = \mathbb{P}(A)$.

L'indépendance exprime qu'apprendre la réalisation de l'un des événements ne modifie pas la probabilité de l'autre.

Piège classique — indépendance et incompatibilité

Indépendant ne signifie pas **incompatible**. Si $A \cap B = \emptyset$ avec $\mathbb{P}(A) > 0$ et $\mathbb{P}(B) > 0$, alors A et B ne sont pas indépendants puisque

$$\mathbb{P}(A \cap B) = 0 \neq \mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B).$$

Exemple

On lance deux dés équilibrés. A = “le premier dé est pair” et B = “le second dé vaut 6”. Alors

$$\mathbb{P}(A \cap B) = \frac{3}{36} = \frac{1}{2} \times \frac{1}{6} = \mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B),$$

donc A et B sont indépendants.

9 Variables aléatoires finies

Définition

Une variable aléatoire réelle finie est une application

$$X : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$$

qui ne prend qu'un nombre fini de valeurs $x_1, \dots, x_r$. Sa **loi** est donnée par

$$p_i = \mathbb{P}(X = x_i), \quad p_i \geq 0, \quad \sum_{i=1}^r p_i = 1.$$

Définition — espérance et variance

$$\mathbb{E}(X) = \sum_{i=1}^r x_i \mathbb{P}(X = x_i)$$

$$\text{Var}(X) = \mathbb{E}((X - \mathbb{E}(X))^2) = \mathbb{E}(X^2) - \mathbb{E}(X)^2.$$

L'écart-type est $\sigma(X) = \sqrt{\text{Var}(X)}$.

Pour $a, b \in \mathbb{R}$:

$$\mathbb{E}(aX + b) = a\mathbb{E}(X) + b, \quad \text{Var}(aX + b) = a^2 \text{Var}(X).$$

Exemple

Si X est le gain d'un jeu prenant les valeurs $-2, 1, 5$ avec probabilités $\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{6}$, alors

$$\mathbb{E}(X) = -2 \cdot \frac{1}{2} + 1 \cdot \frac{1}{3} + 5 \cdot \frac{1}{6} = \frac{1}{6}.$$

Le gain moyen théorique est positif, mais l'espérance n'est pas une valeur nécessairement observée lors d'une partie.

10 Lois de Bernoulli et binomiale

Définition

Une variable X suit une loi de Bernoulli de paramètre $p \in [0, 1]$ si

$$\mathbb{P}(X = 1) = p, \quad \mathbb{P}(X = 0) = 1 - p.$$

Alors $\mathbb{E}(X) = p$ et $\text{Var}(X) = p(1 - p)$.

Si l'on répète n épreuves de Bernoulli **indépendantes** de même probabilité de succès p , et si X compte le nombre de succès, alors

$$X \sim \mathcal{B}(n, p),$$

$$\mathbb{P}(X = k) = \binom{n}{k} p^k (1 - p)^{n-k}, \quad k = 0, \dots, n,$$

$$\mathbb{E}(X) = np, \quad \text{Var}(X) = np(1 - p).$$

11 Méthode générale de résolution

Méthode — dénombrement

1. Décrire précisément un résultat élémentaire.
2. Demander : **ordre ou pas ? répétition ou pas ?**
3. Choisir le modèle : n^p , A_n^p , $\binom{n}{p}$ ou $n!$.
4. Si le comptage est complexe, découper en cas disjoints ou utiliser le complémentaire.
5. Vérifier que l'on n'a ni oublié ni compté plusieurs fois une même configuration.

Méthode — probabilités

1. Définir l'univers et les événements avec des notations claires.
2. Vérifier si l'univers est équiprobable. Si oui, compter numérateur et dénominateur.
3. En présence d'informations successives, utiliser les probabilités conditionnelles.
4. Pour un événement pouvant survenir par plusieurs branches, utiliser les probabilités totales.
5. Pour remonter d'un effet observé vers une cause, utiliser Bayes.
6. Pour une variable aléatoire, établir d'abord sa loi et vérifier que la somme des probabilités vaut 1.

12 Erreurs fréquentes

Piège classique

- Utiliser un arrangement alors que l'ordre ne compte pas.
- Utiliser $|A|/|\Omega|$ sans vérifier l'équiprobabilité.
- Confondre $\mathbb{P}(A | B)$ et $\mathbb{P}(B | A)$.
- Confondre incompatibilité et indépendance.
- Appliquer la loi binomiale sans vérifier **indépendance** et **probabilité de succès constante**.
- Oublier que $\text{Var}(X) = \mathbb{E}(X^2) - \mathbb{E}(X)^2$, et non $\mathbb{E}(X^2) - \mathbb{E}(X)$.

13 Exercices corrigés essentiels

Exemple — exercice 1 : ordre ou non ?

On choisit 3 étudiants parmi 15 pour constituer un groupe, sans rôle particulier. Le résultat est une partie de taille 3 :

$$\binom{15}{3} = 455.$$

Si l'on choisissait un président, un secrétaire et un trésorier, il y aurait

$$A_{15}^3 = 15 \times 14 \times 13 = 2730$$

possibilités.

Exemple — exercice 2 : conditionnement

Une urne contient 5 boules blanches et 3 noires. Deux tirages sont effectués sans remise. La probabilité d'obtenir exactement une boule noire vaut

$$\frac{5}{8} \frac{3}{7} + \frac{3}{8} \frac{5}{7} = \frac{30}{56} = \frac{15}{28}.$$

Les deux termes correspondent aux cas BN et NB , qui sont incompatibles.

Exemple — exercice 3 : Bayes

Deux machines M_1 et M_2 produisent respectivement 60% et 40% des pièces. Leurs taux de défaut sont 2% et 5%. Si D désigne “défectueuse”,

$$\mathbb{P}(D) = 0.6 \times 0.02 + 0.4 \times 0.05 = 0.032.$$

Donc

$$\mathbb{P}(M_2 \mid D) = \frac{0.4 \times 0.05}{0.032} = 0.625.$$

Exemple — exercice 4 : variable aléatoire

On lance deux pièces équilibrées et X désigne le nombre de piles. Alors

$$\mathbb{P}(X = 0) = \frac{1}{4}, \quad \mathbb{P}(X = 1) = \frac{1}{2}, \quad \mathbb{P}(X = 2) = \frac{1}{4}.$$

Ainsi

$$\mathbb{E}(X) = 1, \quad \mathbb{E}(X^2) = \frac{3}{2}, \quad \text{Var}(X) = \frac{3}{2} - 1 = \frac{1}{2}.$$

Théorème — à retenir

Le dénombrement est le socle des probabilités finies : **on décrit d’abord les issues, puis on compte, et seulement ensuite on calcule une probabilité.** Les formules ne remplacent jamais l’identification du bon modèle.