

Plaquette 2 - Calculer des dérivées, tangentes et raccords

Dérivabilité — Licence 1 (L1)

Corrections détaillées

Boîte à outils

Règles de dérivation.

$$(uv)' = u'v + uv' \quad \left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2} \quad (g \circ u)' = u' \times g' \circ u$$

$$- (e^u)' = u'e^u; (\ln u)' = \frac{u'}{u}; (\sqrt{u})' = \frac{u'}{2\sqrt{u}}; (u^\alpha)' = \alpha u' u^{\alpha-1}.$$

$$- \arctan' = \frac{1}{1+x^2}; \arcsin' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \text{ sur }]-1; 1[.$$

$$- \text{Tangente en } a : y = f(a) + f'(a)(x - a).$$

$$- \text{Réciproque : si } f(x_0) \neq 0 \text{ et } y_0 = f(x_0), \text{ alors } (f^{-1})'(y_0) = \frac{1}{f'(x_0)}.$$

$$- \text{Raccord en } a : f \text{ dérivable en } a \Leftrightarrow \text{taux d'accroissement de limites à gauche et à droite égales et finies.}$$

Correction de l'exercice 1 - Trois dérivées

$$- \text{Produit : } f(x) = 2xe^{-x} - (x^2 + 1)e^{-x}, \text{ soit}$$

$$f(x) = -(x^2 - 2x + 1)e^{-x} = -(x - 1)^2 e^{-x} \leq 0$$

$$- f \text{ est donc décroissante sur } \mathbb{R} \text{ (dérivée nulle seulement en 1).}$$

$$- g'(x) = \frac{2x}{x^2 + 1} \text{ (dérivée de } \ln u \text{).}$$

$$- h'(x) = \frac{2 \sin x \cos x}{2\sqrt{1 + \sin^2 x}} = \frac{\sin x \cos x}{\sqrt{1 + \sin^2 x}} \text{ (dérivée de } \sqrt{u} \text{ avec } u = 1 + \sin^2 x > 0 \text{).}$$

$$\textbf{Réponse. } f = -(x - 1)^2 e^{-x}; g' = \frac{2x}{x^2 + 1}; h' = \frac{\sin x \cos x}{\sqrt{1 + \sin^2 x}}.$$

Correction de l'exercice 2 - Arctangente et son inverse

$$\text{Par la formule de la composée, avec } u = \frac{1}{x}, u' = -\frac{1}{x^2} :$$

$$\varphi'(x) = \frac{1}{1+x^2} + \frac{-\frac{1}{x^2}}{1+\frac{1}{x^2}} = \frac{1}{1+x^2} - \frac{1}{x^2+1} = 0$$

$$- \varphi \text{ est dérivable de dérivée nulle sur l'intervalle }]0; +\infty[: \text{elle y est constante, égale à } \varphi(1) = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{2}.$$

$$- \text{Sur }]-\infty; 0[, \text{ même calcul, et } \varphi(-1) = -\frac{\pi}{2} : \text{la constante change, car } \mathbb{R}^* \text{ n'est pas un intervalle.}$$

$$\textbf{Réponse. } \varphi' = 0; \varphi = \frac{\pi}{2} \text{ sur }]0; +\infty[.$$

Correction de l'exercice 3 - Dériver x puissance x

$$\text{On écrit } x^x = e^{x \ln x}, \text{ puis on dérive la composée :}$$

$$f(x) = (x \ln x)' e^{x \ln x} = (\ln x + 1) x^x$$

- $x^x > 0$, donc f a le signe de $\ln x + 1$: négatif sur $]0; \frac{1}{e}[$, positif ensuite.
- f atteint son minimum en $\frac{1}{e}$: $f\left(\frac{1}{e}\right) = e^{-1/e} \approx 0,692$.
- Piège : x^x n'est ni une puissance x^n (dérivée nx^{n-1}) ni une exponentielle a^x (dérivée $a^x \ln a$).

Réponse. $f(x) = (\ln x + 1)x^x$; minimum en $\frac{1}{e}$.

Correction de l'exercice 4 - Dérivée de l'arcsinus

$\sin$ est une bijection de $\left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$ sur $[-1; 1]$, de dérivée $\cos$, qui ne s'annule pas sur $\left]-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right[$. Pour $y = \sin x$ avec x dans cet intervalle ouvert :

$$\arcsin'(y) = \frac{1}{\cos x} = \frac{1}{\sqrt{1 - \sin^2 x}} = \frac{1}{\sqrt{1 - y^2}}$$

- On a pris $\cos x = +\sqrt{1 - \sin^2 x}$, car $\cos x > 0$ sur $\left]-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right[$.
- En $y = \pm 1$, $\sin' = \cos$ s'annule : la courbe de arcsin a une tangente **verticale**, et le taux d'accroissement tend vers $+\infty$.

Réponse. $\arcsin'(y) = \frac{1}{\sqrt{1 - y^2}}$; tangentes verticales en ± 1 .

Correction de l'exercice 5 - Tangente et position

$\ln 1 = 0$ et $\ln'(1) = 1$: la tangente est $y = x - 1$.

- On étudie $d(x) = x - 1 - \ln x$ sur $]0; +\infty[$: $d'(x) = 1 - \frac{1}{x}$, négative sur $]0; 1[$, positive ensuite.

$$d(x) \geq d(1) = 0 \Leftrightarrow \ln x \leq x - 1$$

- La courbe est sous sa tangente, avec contact seulement en 1. C'est l'inégalité fondamentale du logarithme.
- Conséquence : $\ln(1 + t) \leq t$ pour $t > -1$.

Réponse. $y = x - 1$; $\ln x \leq x - 1$.

Correction de l'exercice 6 - Tangentes passant par un point

La tangente au point d'abscisse a a pour équation

$$y = a^2 + 2a(x - a) = 2ax - a^2$$

- Elle passe par A si et seulement si $-1 = 2a \times 0 - a^2$, soit $a^2 = 1$: $a = 1$ ou $a = -1$.
- Deux tangentes : $y = 2x - 1$ (point de contact $(1; 1)$) et $y = -2x - 1$ (point de contact $(-1; 1)$).
- Méthode : on paramètre la tangente par l'abscisse du point de contact, puis on impose la condition.

Réponse. $y = 2x - 1$ et $y = -2x - 1$.

Correction de l'exercice 7 - Un raccord dérivable

Chaque morceau est dérivable sur son intervalle ouvert ; tout se joue en 1.

- **Continuité** en 1 : $f(1) = 1$ et la limite à droite vaut $a + b$. Condition : $a + b = 1$.
- **Dérivabilité** : à gauche, le taux d'accroissement tend vers $2 \times 1 = 2$; à droite, pour $h > 0$,

$$\frac{f(1+h) - f(1)}{h} = \frac{a + ah + b - 1}{h} = a \quad (\text{avec } a + b = 1)$$

- Condition : $a = 2$, donc $b = -1$. La droite $y = 2x - 1$ est la tangente à la parabole en 1 : le raccord est « lisse ».

Réponse. $a = 2$, $b = -1$.

Correction de l'exercice 8 - Dérivable mais pas de classe C^1

- En 0 : $\frac{f(h) - f(0)}{h} = h \sin \frac{1}{h} \leq |h| \rightarrow 0 : f'(0) = 0$.

- Pour $x \neq 0$, par les règles de calcul :

$$f(x) = 2x \sin \frac{1}{x} - \cos \frac{1}{x}$$

- Le premier terme tend vers 0, mais $\cos \frac{1}{x}$ n'a pas de limite en 0 : f n'a pas de limite en 0, donc n'y est pas continue.
- Une fonction dérivable n'a donc pas forcément une dérivée continue (elle n'est pas « de classe C^1 »).

Réponse. $f'(0) = 0$; $f(x) = 2x \sin \frac{1}{x} - \cos \frac{1}{x}$ sans limite en 0.

Correction de l'exercice 9 - La racine en 0

- Taux d'accroissement de $\sqrt{x}$ en 0 : $\frac{\sqrt{h}}{h} = \frac{1}{\sqrt{h}} \xrightarrow{h \rightarrow 0} +\infty$. Non dérivable : tangente verticale.

- Pour $x\sqrt{x} = x^{3/2}$:

$$\frac{h\sqrt{h} - 0}{h} = \sqrt{h} \xrightarrow{h \rightarrow 0} 0$$

- Dérivable en 0 (à droite), de dérivée nulle ; sur $]0; +\infty[$, sa dérivée vaut $\frac{3}{2}\sqrt{x}$, qui tend aussi vers 0.
- Multiplier par x « aplatit » la tangente verticale.

Réponse. $\sqrt{x}$ non ; $x\sqrt{x}$ oui, dérivée nulle en 0.

Correction de l'exercice 10 - Factoriser une dérivée

Dérivée d'un produit, en gardant les facteurs communs :

$$f(x) = 2(x-1)(x+2)^3 + 3(x-1)^2(x+2)^2 = (x-1)(x+2)^2(2(x+2) + 3(x-1))$$

- soit $f(x) = (x-1)(x+2)^2(5x+1)$.
- $(x+2)^2 \geq 0$; le signe dépend de $(x-1)(5x+1)$: positif sur $]-\infty; -\frac{1}{5}[$, négatif sur $]-\frac{1}{5}; 1[$, positif sur $]1; +\infty[$.
- f a un maximum local en $-\frac{1}{5}$ et un minimum local en 1 ($f(1) = 0$). En -2 , f s'annule sans changer de signe : ce n'est pas un extremum.

Réponse. $f(x) = (x-1)(x+2)^2(5x+1)$.

Correction de l'exercice 11 - Dérivée d'une réciproque sans la calculer

- $f(0) = 0 + 1 = 1$, donc $g(1) = 0$.
- $f(x) = 1 + e^x > 0$ ne s'annule pas ; par la formule de dérivation de la réciproque :

$$g'(1) = \frac{1}{f(g(1))} = \frac{1}{f(0)} = \frac{1}{1+1} = \frac{1}{2}$$

- On n'a jamais eu besoin de l'expression de g , qui ne s'écrit pas avec les fonctions usuelles.
- Géométriquement, la tangente à la courbe de g est la symétrique, par rapport à $y = x$, de celle de f : les pentes sont inverses.

Réponse. $g(1) = 0$; $g'(1) = \frac{1}{2}$.

Correction de l'exercice 12 - Vitesse d'un mobile

La vitesse est la dérivée de la position :

$$v(t) = x'(t) = 3t^2 - 12t + 9 = 3(t-1)(t-3)$$

- Le mobile s'arrête ($v = 0$) aux instants $t = 1$ s et $t = 3$ s.
- Sur $[0; 1[$ et $]3; +\infty[$, $v > 0$: il avance ; sur $]1; 3[$, $v < 0$: il recule.
- Positions : $x(1) = 4$ m, $x(3) = 0$ m ; il revient à son point de départ à $t = 3$ s avant de repartir.

Réponse. Arrêts à 1 s et 3 s ; recule entre les deux.

Correction de l'exercice 13 - Dériver à partir de valeurs

On applique les règles de dérivation au point 1, en évaluant chaque dérivée au bon endroit.

- Composée : la dérivée de g est prise au point $f(1) = 2$:

$$(g \circ f)'(1) = f'(1) \times g'(f(1)) = 3 \times g'(2) = 3 \times (-1) = -3$$

- Carré : $(f^2)' = 2ff'$, donc $(f^2)'(1) = 2 \times 2 \times 3 = 12$.
- Inverse : $\left(\frac{1}{f}\right)' = -\frac{f'}{f^2}$, donc $\left(\frac{1}{f}\right)'(1) = -\frac{3}{4}$.
- Erreur fréquente : écrire $g'(1)$ au lieu de $g'(f(1))$ dans la dérivée d'une composée.

Réponse. -3 ; 12 ; $-\frac{3}{4}$.

Correction de l'exercice 14 - Vrai ou faux ?

- a) **Vrai** : en dérivant $f(-x) = f(x)$, on obtient $-f'(-x) = f'(x)$.

$$f'(-x) = -f'(x)$$

- b) **Vrai** : $f(a+h) - f(a) = h \times \frac{f(a+h) - f(a)}{h} \rightarrow 0 \times f'(a) = 0$.

- c) **Faux** : $|x|$ est continue et non dérivable en 0.

- d) **Faux** : x^3 a une dérivée nulle en 0 sans extremum (la dérivée ne change pas de signe).

Réponse. a) vrai · b) vrai · c) faux · d) faux.

Correction de l'exercice 15 - Synthèse : une réciproque reconnue

- a) $\sqrt{x^2 + 1} > \sqrt{x^2} = |x| \geq -x$, donc $x + \sqrt{x^2 + 1} > 0$: F est bien définie, et dérivable comme composée de fonctions dérivables.

- b) Avec $u = x + \sqrt{x^2 + 1}$, $u' = 1 + \frac{x}{\sqrt{x^2 + 1}} = \frac{\sqrt{x^2 + 1} + x}{\sqrt{x^2 + 1}}$:

$$F'(x) = \frac{u'}{u} = \frac{1}{\sqrt{x^2 + 1}}$$

c) $F' > 0$: strictement croissante. $G(x) = F(x) + F(-x)$ a une dérivée $F'(x) - F'(-x) = 0$ et $G(0) = 0$: $G = 0$, F est impaire. (F est la fonction argsh .)

Réponse. b) $F' = \frac{1}{\sqrt{x^2 + 1}}$ · c) croissante, impaire.