

Plaquette 1 - Dérivées, accroissements finis et étude de fonctions

Dérivabilité — Licence 1 (L1)

Corrections détaillées

Boîte à outils

Définition. f est dérivable en a si $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$ existe et est finie ; cette limite est $f'(a)$, pente de la **tangente** :

$$y = f(a) + f'(a)(x - a)$$

- Dérivabilité $\Rightarrow$ continuité ; la réciproque est **fausse** ($|x|$ en 0).
- f est dérivable en $a \Leftrightarrow f'_g(a)$ et $f'_d(a)$ existent et sont **égales**.

Règles de calcul.

$$(uv)' = u'v + uv' \quad \left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2} \quad (g \circ u)' = u' \times (g' \circ u)$$

$$(u^n)' = nu'u^{n-1} \quad (\sqrt{u})' = \frac{u'}{2\sqrt{u}} \quad (e^u)' = u'e^u \quad (\ln u)' = \frac{u'}{u}$$

Dérivée de la réciproque : si f est bijective dérivable avec $f'(f^{-1}(y)) \neq 0$,

$$(f^{-1})'(y) = \frac{1}{f'(f^{-1}(y))}$$

Théorèmes.

- **Extremum intérieur** : extremum local en un point intérieur où f est dérivable $\Rightarrow f'$ y est **nulle** (réciproque fausse).
- **Rolle** : f continue sur $[a; b]$, dérivable sur $]a; b[$, $f(a) = f(b) \Rightarrow \exists c, f'(c) = 0$.
- **Accroissements finis** : $f(b) - f(a) = (b - a)f'(c)$ pour un $c \in]a; b[$.
- **Inégalité des accroissements finis** : $|f'| \leq M \Rightarrow |f(b) - f(a)| \leq M|b - a|$.
- **Monotonie** : $f' \geq 0$ sur un intervalle $\Rightarrow f$ croissante ; $f' > 0$ (sauf points isolés) $\Rightarrow$ **stricte** croissance.
- **Dérivées successives** : f est C^k si $f^{(k)}$ existe et est continue ; $f'' \geq 0$ caractérise la **convexité**.

Correction de l'exercice 1 - Dérivée par la définition

- **Taux de variation** en $a = 1$:

$$\frac{f(1+h) - f(1)}{h} = \frac{\frac{1}{1+h} - 1}{h} = \frac{\frac{1 - (1+h)}{1+h}}{h} = \frac{-h}{h(1+h)} = \frac{-1}{1+h}$$

- **Limite** quand $h \rightarrow 0$: -1 .
- Donc $f'(1) = -1$.
- **Contrôle par la formule usuelle** : $f(x) = -\frac{1}{x^2}$, donc $f'(1) = -1$ ✓
- **Tangente** : $y = 1 - (x - 1) = 2 - x$.
- **Vérification numérique** : $f(1,01) = 0,990099$, et la tangente donne 0,99 — écart de 10^{-4} , cohérent avec un terme d'ordre h^2 ✓

Réponse. $f'(1) = -1$; tangente $y = 2 - x$.

Correction de l'exercice 2 - Non-dérivabilité

- **Taux à droite** ($h > 0$) : $\frac{|h|}{h} = 1$, donc $f_d(2) = 1$.
 - **Taux à gauche** ($h < 0$) : $\frac{|h|}{h} = -1$, donc $f_g(2) = -1$.
 - Les deux dérivées existent mais **diffèrent** : f n'est **pas dérivable** en 2.
 - **Continuité** : f est bien **continue** en 2 ($|x - 2| \rightarrow 0$) — continuité sans dérivabilité.
 - **Interprétation graphique** : la courbe présente un **point anguleux**, avec deux demi-tangentes de pentes ± 1 .
 - **Conséquence** : on ne peut pas appliquer Rolle ou l'EAF sur un intervalle contenant 2 ; c'est pourquoi ces théorèmes exigent la dérivabilité **sur tout l'intervalle ouvert**.
- Réponse.** Non dérivable : $f_g(2) = -1 \neq 1 = f_d(2)$.

Correction de l'exercice 3 - Dérivées composées

- a) Forme $\frac{u'}{u}$ avec $u = x^2 + 1$: $f(x) = \frac{2x}{x^2 + 1}$.
- b) Forme $u'e^u$ avec $u = 3x^2$: $g'(x) = 6xe^{3x^2}$.
- c) Forme $\frac{u'}{2\sqrt{u}}$ avec $u = \sin x > 0$: $h'(x) = \frac{\cos x}{2\sqrt{\sin x}}$.
- **Contrôles de cohérence** :
- $f > 0$ pour $x > 0$ ✓ (ln d'une fonction croissante) ;
- g' a le signe de x ✓ (g est paire, minimale en 0) ;
- h' s'annule en $\frac{\pi}{2}$ ✓, où $\sin$ atteint son maximum.
- **Méthode** : identifier la fonction **extérieure** et la fonction **intérieure**, puis appliquer $u' \times (g' \circ u)$.

Réponse. a) $\frac{2x}{x^2 + 1}$ · b) $6xe^{3x^2}$ · c) $\frac{\cos x}{2\sqrt{\sin x}}$.

Correction de l'exercice 4 - Théorème de Rolle

- **Racines de f** : 0, 1, 2 — trois racines **distinctes**.
- **Rolle sur $[0; 1]$** : f est polynomiale donc continue et dérivable, et $f(0) = f(1) = 0$. Il existe $c_1 \in]0; 1[$ avec $f(c_1) = 0$.
- **Rolle sur $[1; 2]$** : de même, $c_2 \in]1; 2[$.
- **Nombre exact** : f est de degré 3, donc f' est de degré 2 — elle a **au plus deux** racines. Les deux trouvées sont donc les **seules**.
- **Calcul explicite** : $f(x) = x^3 - 3x^2 + 2x$, donc $f'(x) = 3x^2 - 6x + 2$, de racines $\frac{6 \pm \sqrt{12}}{6} = 1 \pm \frac{1}{\sqrt{3}}$.
- **Valeurs** : $c_1 \approx 0,4226$ et $c_2 \approx 1,5774$ — conformes aux intervalles prévus ✓
- **Propriété générale** : les racines de P' **s'intercalent** entre celles de P (théorème d'entrelacement).

Réponse. Deux racines : $1 \pm \frac{1}{\sqrt{3}}$, soit $\approx 0,423$ et $\approx 1,577$.

Correction de l'exercice 5 - Égalité des accroissements finis

- **EAF** : il existe $c \in]1; e[$ tel que $f(e) - f(1) = (e - 1)f'(c)$.
- Membre de gauche : $1 - 0 = 1$.

— $f'(c) = \frac{1}{c}$, donc $1 = \frac{e-1}{c}$, soit

$$c = e - 1 \approx 1,71828$$

— **Vérification d'appartenance** : $1 < 1,718 < e \approx 2,718$ ✓

— **Interprétation** : la tangente en $c = e - 1$ est **parallèle** à la corde reliant les points d'abscisses 1 et e .

— **Pente commune** : $\frac{1}{e-1} \approx 0,582$ ✓

— **Remarque** : contrairement au cas des paraboles, c n'est pas le milieu de l'intervalle ($\approx 1,859$) — la position de c dépend de la courbure.

Réponse. $c = e - 1 \approx 1,718$.

Correction de l'exercice 6 - Inégalité par les accroissements finis

On applique l'**EAF** à $f(t) = \ln(1+t)$ sur $[0; x]$.

— Il existe $c \in]0; x[$ tel que $\ln(1+x) - 0 = x \times \frac{1}{1+c}$.

— **Encadrement de c** : $0 < c < x$, donc $1 < 1+c < 1+x$, d'où

$$\frac{1}{1+x} < \frac{1}{1+c} < 1$$

— En multipliant par $x > 0$:

$$\frac{x}{1+x} < \ln(1+x) < x$$

— **Contrôle** en $x = 1$: $0,5 < 0,693 < 1$ ✓ ; en $x = 0,1$: $0,0909 < 0,0953 < 0,1$ ✓

— **Interprétation** : l'encadrement devient très serré pour x petit — les trois quantités sont équivalentes à x .

— **Usage** : ces inégalités sont l'outil standard pour majorer des logarithmes dans les calculs de limites et de séries.

Réponse. EAF sur $\ln(1+t)$ et encadrement de $\frac{1}{1+c}$.

Correction de l'exercice 7 - Étude de fonction complète

— **Domaine** : $\mathbb{R} \setminus \{1\}$.

— **Dérivée** :

$$f'(x) = \frac{2x(x-1) - x^2}{(x-1)^2} = \frac{x^2 - 2x}{(x-1)^2} = \frac{x(x-2)}{(x-1)^2}$$

— **Signe** : le dénominateur est positif, donc f' a le signe de $x(x-2)$ — positive sur $] -\infty; 0]$ et $[2; +\infty[$, négative entre.

— **Extremums locaux** : maximum en $x = 0$ avec $f(0) = 0$; minimum en $x = 2$ avec $f(2) = 4$.

— **Asymptote verticale** : $x = 1$ (avec $f \rightarrow -\infty$ à gauche, $+\infty$ à droite).

— **Asymptote oblique** : la division donne $f(x) = x + 1 + \frac{1}{x-1}$, donc $y = x + 1$ est asymptote en $\pm\infty$.

— **Position** : $f(x) - (x+1) = \frac{1}{x-1}$, positif pour $x > 1$ (courbe **au-dessus**), négatif pour $x < 1$.

— **Curiosité** : le « maximum » local 0 est **inférieur** au « minimum » local 4 — c'est possible car la fonction n'est pas définie sur un intervalle.

Réponse. Max local 0 en $x = 0$, min local 4 en $x = 2$; asymptotes $x = 1$ et $y = x + 1$.

Correction de l'exercice 8 - Dérivée de la réciproque

- **Bijektivité** : $f(x) = 3x^2 + 1 > 0$, donc f est strictement croissante ; ses limites en $\mp\infty$ sont $\mp\infty$. C'est une **bijection de $\mathbb{R}$ sur $\mathbb{R}$** ✓
- **Antécédent de 2** : on cherche x avec $x^3 + x = 2$. On voit que $x = 1$ convient ($1 + 1 = 2$), et l'unicité est assurée. Donc $f^{-1}(2) = 1$.
- **Formule** :

$$(f^{-1})'(2) = \frac{1}{f'(f^{-1}(2))} = \frac{1}{f'(1)} = \frac{1}{4}$$

- **Contrôle numérique** : $f(1,05) = 1,157625 + 1,05 = 2,207625$, donc $f^{-1}(2,2076) \approx 1,05$; le taux $\frac{0,05}{0,2076} \approx 0,241$, proche de 0,25 ✓
- **Interprétation graphique** : les courbes de f et f^{-1} sont symétriques par rapport à la droite $y = x$, et les pentes des tangentes en des points correspondants sont **inverses**.

Réponse. $(f^{-1})'(2) = \frac{1}{4}$.

Correction de l'exercice 9 - Convexité

- **Dérivée première** : $f(x) = (1+x)e^x$.
- **Dérivée seconde** : $f'(x) = e^x + (1+x)e^x = (2+x)e^x$.
- **Signe** : $e^x > 0$, donc f' a le signe de $x+2$.
- f est **concave** sur $]-\infty; -2]$ et **convexe** sur $[-2; +\infty[$.
- **Point d'inflexion** en $x = -2$, d'ordonnée $f(-2) = -2e^{-2} \approx -0,271$.
- **Contrôle** : $f'(-3) = -e^{-3} < 0$ ✓ et $f'(0) = 2 > 0$ ✓
- **Minimum** : f' s'annule en $x = -1$, où $f(-1) = -e^{-1} \approx -0,368$ — c'est le **minimum global**.
- **Ne pas confondre** : $x = -1$ (extremum, $f' = 0$) et $x = -2$ (inflexion, $f'' = 0$).

Réponse. Concave avant -2 , convexe après ; inflexion en $(-2; -2e^{-2})$.

Correction de l'exercice 10 - Nombre de solutions

Posons $g(x) = e^x - 3x$.

- **Dérivée** : $g'(x) = e^x - 3$, nulle pour $x = \ln 3 \approx 1,0986$.
- **Variations** : g décroît sur $]-\infty; \ln 3]$, croît ensuite.
- **Minimum** : $g(\ln 3) = 3 - 3\ln 3 \approx 3 - 3,296 = -0,296 < 0$.
- **Limites** : $g \rightarrow +\infty$ en $-\infty$ (le terme $-3x$ domine) et en $+\infty$ (l'exponentielle domine).
- **Conclusion** : g change de signe **deux fois** — l'équation a exactement **deux solutions**.
- **Localisation** : $g(0) = 1 > 0$ et $g(1) = e - 3 \approx -0,282 < 0$, donc une racine dans $]0; 1[$ (environ 0,619) ; $g(2) = e^2 - 6 \approx 1,389 > 0$, donc l'autre dans $]1; 2[$ (environ 1,512).
- **Méthode générale** : tableau de variations + signe du (des) extremum(s) + limites aux bornes.

Réponse. Deux solutions, environ 0,619 et 1,512.

Correction de l'exercice 11 - Fonction dérivable de dérivée bornée

- **Dérivée** : $f(x) = 2x \cos(x^2)$.

— **Majoration sur** $\left[0; \frac{1}{2}\right]$:

$$|f(x)| \leq 2x \times 1 \leq 2 \times \frac{1}{2} = 1$$

— **IAF** : pour x, y dans l'intervalle,

$$|f(x) - f(y)| \leq 1 \times |x - y|$$

— f est donc **1-lipschitzienne** sur $\left[0; \frac{1}{2}\right]$ ✓

— **Sur $\mathbb{R}$ entier**, en revanche, f n'est **pas bornée** ($|f(x)|$ atteint des valeurs proches de $2x$) : f n'y est pas lipschitzienne.

— **Conséquence** : toute fonction lipschitzienne est **uniformément continue** — c'est le critère le plus simple pour l'établir.

— **Contrôle** : $f(0,5) - f(0) = \sin(0,25) \approx 0,2474 \leq 0,5$ ✓

Réponse. $|f| \leq 1$ sur l'intervalle, puis IAF.

Correction de l'exercice 12 - Dérivées successives

— **Premières dérivées** :

$$f(x) = \frac{1}{(1-x)^2};$$

$$f'(x) = \frac{2}{(1-x)^3};$$

$$f''(x) = \frac{6}{(1-x)^4}.$$

$$\text{— Conjecture : } f^{(n)}(x) = \frac{n!}{(1-x)^{n+1}}.$$

— **Démonstration par récurrence** : vrai pour $n = 0$; et en dérivant,

$$\frac{d}{dx} \frac{n!}{(1-x)^{n+1}} = n! \times \frac{(n+1)}{(1-x)^{n+2}} = \frac{(n+1)!}{(1-x)^{n+2}}$$

— ✓

— **Valeurs en 0** : $f^{(n)}(0) = n!$.

— **Lien avec les séries** : le coefficient de Taylor $\frac{f^{(n)}(0)}{n!} = 1$ — on retrouve

$$\frac{1}{1-x} = \sum_{n \geq 0} x^n \quad \checkmark$$

— **Contrôle** : $f''(0) = 6 = 3!$ ✓

Réponse. $f^{(n)}(x) = \frac{n!}{(1-x)^{n+1}}.$

Correction de l'exercice 13 - Dérivable malgré la valeur absolue

On revient au taux d'accroissement en 0.

$$\frac{f(h) - f(0)}{h} = \frac{h|h|}{h} = |h| \xrightarrow{h \rightarrow 0} 0$$

— f est dérivable en 0, avec $f(0) = 0$. Ailleurs, $f(x) = x^2$ pour $x > 0$ et $-x^2$ pour $x < 0$: $f(x) = 2|x|$ sur $\mathbb{R}$.

— Pour g : $\frac{g(h) - g(0)}{h} = \frac{|h|}{h}$ vaut 1 à droite et -1 à gauche : g n'est pas dérivable en 0 (point anguleux).

— Le facteur x « adoucit » le coin de la valeur absolue.

Réponse. f dérivable, $f(x) = 2|x|$; g non dérivable en 0.

Correction de l'exercice 14 - Approximation affine

La tangente en $a = 4$ a pour équation $y = f(4) + f'(4)(x - 4)$, avec $f(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$:

$$\sqrt{x} \approx 2 + \frac{1}{4}(x - 4)$$

- Pour $x = 4,02$: $\sqrt{4,02} \approx 2 + \frac{0,02}{4} = 2,005$.
- Valeur réelle : $\sqrt{4,02} \approx 2,004994$; l'erreur est d'environ 6×10^{-6} .
- L'approximation est **par excès** : $\sqrt{}$ est concave, sa courbe est sous ses tangentes.

Réponse. $\sqrt{4,02} \approx 2,005$ (par excès, erreur $\approx 6 \times 10^{-6}$).

Correction de l'exercice 15 - Synthèse : optimisation concrète

Notons r le rayon et h la hauteur (en dm, avec $V = 1 \text{ dm}^3$).

— **Contrainte** : $\pi r^2 h = 1$, donc $h = \frac{1}{\pi r^2}$.

— **Surface totale** (deux disques + le tour) :

$$S(r) = 2\pi r^2 + 2\pi r h = 2\pi r^2 + \frac{2}{r}$$

— **Dérivée** : $S'(r) = 4\pi r - \frac{2}{r^2} = \frac{4\pi r^3 - 2}{r^2}$.

— **Point critique** : $r^3 = \frac{1}{2\pi}$, donc $r = \left(\frac{1}{2\pi}\right)^{1/3} \approx 0,5419 \text{ dm}$.

— S' est négative avant, positive après : c'est un **minimum**.

— **Hauteur** : $h = \frac{1}{\pi r^2} \approx \frac{1}{\pi \times 0,2936} \approx 1,0839 \text{ dm}$.

— **Relation remarquable** : $h = 2r$ — la boîte optimale a une hauteur **égale à son diamètre**.

— **Surface minimale** : $S \approx 2\pi \times 0,2936 + \frac{2}{0,5419} \approx 1,845 + 3,691 = 5,536 \text{ dm}^2$.

— **Application industrielle** : les boîtes de conserve réelles sont plus hautes que larges, pour des raisons de manutention et d'empilage — l'optimum géométrique n'est pas l'optimum économique.

Réponse. $r \approx 0,542 \text{ dm}$ et $h = 2r \approx 1,084 \text{ dm}$; $S \approx 5,54 \text{ dm}^2$.