

## Plaquette 5 - Dérivées successives, formule de Leibniz et convexité

### Dérivabilité — Licence 1 (L1)

Corrections détaillées

#### Boîte à outils

##### Dérivées successives.

— Formule de Leibniz, pour  $f$  et  $g$   $n$  fois dérivables :

$$(fg)^{(n)} = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} f^{(k)} g^{(n-k)}$$

—  $\sin^{(n)}(x) = \sin\left(x + \frac{n\pi}{2}\right)$  ;  $\left(\frac{1}{1-x}\right)^{(n)} = \frac{n!}{(1-x)^{n+1}}$  ;  $(x^p)^{(n)} = 0$  si  $n > p$ .

—  $a$  est racine d'ordre au moins 2 d'un polynôme  $P$  si et seulement si  $P(a) = P'(a) = 0$ .

**Convexité** ( $f$  deux fois dérivable sur  $I$ ) :  $f$  convexe  $\Leftrightarrow f' \geq 0$  ; alors, pour tous  $a, x \in I$  et  $t \in [0; 1]$ ,

$$f(x) \geq f(a) + f'(a)(x-a) \quad f(tx + (1-t)y) \leq tf(x) + (1-t)f(y)$$

#### Correction de l'exercice 1 - Les dérivées de $1/(1-x)$

— Initialisation : pour  $n = 0$ ,  $\frac{0!}{(1-x)^1} = \frac{1}{1-x}$ .

— Hérédité : on dérive la formule au rang  $n$ , en écrivant  $(1-x)^{-(n+1)}$  :

$$\left(\frac{n!}{(1-x)^{n+1}}\right)' = n! \times (-(n+1)) \times (-1) \times (1-x)^{-(n+2)} = \frac{(n+1)!}{(1-x)^{n+2}}$$

— (le facteur  $-1$  vient de la dérivée de  $1-x$ ).

— Conséquence : en 0, la dérivée  $n$ -ième vaut  $n!$  ; c'est ce qui donne le développement  $\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + \dots$

**Réponse.** Récurrence : on dérive  $n!(1-x)^{-(n+1)}$ .

#### Correction de l'exercice 2 - Les dérivées du sinus

— Pour  $n = 0$  : évident. Si la formule est vraie au rang  $n$ , on dérive :

$$\sin^{(n+1)}(x) = \cos\left(x + \frac{n\pi}{2}\right) = \sin\left(x + \frac{n\pi}{2} + \frac{\pi}{2}\right)$$

— car  $\cos \theta = \sin\left(\theta + \frac{\pi}{2}\right)$ . C'est la formule au rang  $n+1$ .

—  $2026 = 4 \times 506 + 2$  :  $\sin^{(2026)}(x) = \sin(x + 1013\pi) = \sin(x + \pi) = -\sin x$ .

— Les dérivées sont périodiques de période 4 :  $\sin, \cos, -\sin, -\cos$ .

**Réponse.**  $\sin^{(2026)} = -\sin$ .

#### Correction de l'exercice 3 - Leibniz avec un polynôme

Les dérivées de  $x^2$  sont  $2x$ ,  $2$ , puis  $0$  : seuls les termes  $k = 0, 1, 2$  de la somme sont non nuls, et toutes les dérivées de  $e^x$  valent  $e^x$ .

$$f^{(n)}(x) = \binom{n}{0} x^2 e^x + \binom{n}{1} 2x e^x + \binom{n}{2} 2 e^x$$

— Comme  $\binom{n}{1} = n$  et  $\binom{n}{2} = \frac{n(n-1)}{2}$  :  $f^{(n)}(x) = (x^2 + 2nx + n(n-1))e^x$ .

— Contrôle pour  $n = 1$  :  $(x^2 + 2x)e^x$ , qui est bien la dérivée de  $x^2e^x$ .

**Réponse.**  $f^{(n)}(x) = (x^2 + 2nx + n(n-1))e^x$ .

### Correction de l'exercice 4 - Les dérivées de $x \ln x$

—  $f(x) = \ln x + 1$  et  $f'(x) = \frac{1}{x}$ .

— Pour  $n \geq 2$ ,  $f^{(n)} = \left(\frac{1}{x}\right)^{(n-2)}$ . Or, par récurrence,  $\left(\frac{1}{x}\right)^{(k)} = \frac{(-1)^k k!}{x^{k+1}}$  (chaque dérivation multiplie par  $-(k+1)$  et augmente l'exposant de 1).

$$f^{(n)}(x) = \frac{(-1)^{n-2} (n-2)!}{x^{n-1}} = \frac{(-1)^n (n-2)!}{x^{n-1}}$$

— Contrôle pour  $n = 3$  :  $f'''(x) = -\frac{1}{x^2}$ , et la formule donne  $\frac{(-1)^3 \times 1!}{x^2}$ .

**Réponse.**  $f'' = \frac{1}{x}$  puis  $f^{(n)} = \frac{(-1)^n (n-2)!}{x^{n-1}}$ .

### Correction de l'exercice 5 - Une fonction de classe $C^1$ mais pas $C^2$

— On a vu que  $f(x) = 2|x|$  sur  $\mathbb{R}$  (y compris  $f(0) = 0$ ). Cette fonction est continue :  $f$  est de classe  $C^1$ .

—  $f = 2|\cdot|$  n'est pas dérivable en 0 : son taux d'accroissement

$$\frac{2|h|}{h}$$

— vaut 2 à droite et  $-2$  à gauche.

—  $f$  est donc de classe  $C^1$  mais pas deux fois dérivable en 0. De même,  $x^2|x|$  est de classe  $C^2$  mais pas  $C^3$ .

**Réponse.**  $f = 2|x|$  continue, non dérivable en 0.

### Correction de l'exercice 6 - Une racine double

On calcule  $P$  et ses dérivées en 1 :

$$P(1) = 1 - 4 + 3 = 0 \quad P'(1) = 4 \times 1^3 - 4 = 0 \quad P''(1) = 12 \times 1^2 = 12 \neq 0$$

— 1 est racine d'ordre exactement 2 :  $(x-1)^2$  divise  $P$ , mais pas  $(x-1)^3$ .

— Division par  $(x-1)^2 = x^2 - 2x + 1$  :  $P(x) = (x-1)^2(x^2 + 2x + 3)$  (on vérifie en développant).

—  $x^2 + 2x + 3 = (x+1)^2 + 2 > 0$  :  $P$  n'a pas d'autre racine réelle, et  $P \geq 0$  sur  $\mathbb{R}$ .

**Réponse.**  $P(1) = P'(1) = 0$ ,  $P''(1) \neq 0$  ;  $P = (x-1)^2(x^2 + 2x + 3)$ .

### Correction de l'exercice 7 - Convexité de $x \ln x$

$f'(x) = \frac{1}{x} > 0$  :  $f$  est convexe. L'inégalité de convexité avec  $t = \frac{1}{2}$  :

$$f\left(\frac{a+b}{2}\right) \leq \frac{f(a) + f(b)}{2}$$

— donne exactement l'inégalité demandée.

— Exemple :  $a = 1$ ,  $b = 3$  : à gauche  $\frac{0+3\ln 3}{2} \approx 1,648$  ; à droite  $2 \ln 2 \approx 1,386$ .

— Cette inégalité est au cœur de la notion d'entropie en théorie de l'information.

**Réponse.**  $f' = \frac{1}{x} > 0$  ; inégalité de convexité avec  $t = \frac{1}{2}$ .

### Correction de l'exercice 8 - L'inégalité de Jordan

- La majoration  $\sin x \leq x$  est déjà connue (la courbe est sous sa tangente en 0).
- Sur  $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$ ,  $\sin'' = -\sin \leq 0$  :  $\sin$  est **concave**, donc au-dessus de ses cordes. La corde joignant  $(0; 0)$  et  $\left(\frac{\pi}{2}; 1\right)$  a pour équation  $y = \frac{2}{\pi}x$  :

$$\sin x \geq \frac{2}{\pi}x$$

- Égalité aux deux extrémités seulement. Encadrement utile :  $\sin x$  est « proportionnel » à  $x$  à un facteur entre  $\frac{2}{\pi} \approx 0,64$  et 1 près.

**Réponse.**  $\sin$  concave : au-dessus de sa corde  $y = \frac{2}{\pi}x$ .

### Correction de l'exercice 9 - Moyennes et concavité du logarithme

$\ln'' = -\frac{1}{x^2} < 0$  :  $\ln$  est concave. L'inégalité de concavité avec  $t = \frac{1}{2}$  :

$$\ln \frac{a+b}{2} \geq \frac{\ln a + \ln b}{2} = \ln \sqrt{ab}$$

- $\ln$  étant croissante :  $\frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab}$ .
- Pour trois nombres, l'inégalité de Jensen avec les poids  $\frac{1}{3}$  donne  $\ln \frac{a+b+c}{3} \geq \frac{\ln a + \ln b + \ln c}{3}$ , soit  $\sqrt[3]{abc} \leq \frac{a+b+c}{3}$ .

**Réponse.** Concavité de  $\ln$  puis croissance ;  $\sqrt[3]{abc} \leq \frac{a+b+c}{3}$ .

### Correction de l'exercice 10 - Au-dessus des tangentes

$f(x) = x^2$  est convexe ( $f' = 2 > 0$ ) : sa courbe est au-dessus de sa tangente en  $a$ , d'équation  $y = a^2 + 2a(x - a) = 2ax - a^2$ .

$$x^2 \geq 2ax - a^2$$

- Calcul direct :  $x^2 - 2ax + a^2 = (x - a)^2 \geq 0$ .
- Application : avec  $a = 1$ , on retrouve  $x^2 \geq 2x - 1$ , et avec  $x = \frac{u}{v}$ , on obtient  $u^2 + v^2 \geq 2uv$ .

**Réponse.** Tangente en  $a$  :  $y = 2ax - a^2$  ; ou  $(x - a)^2 \geq 0$ .

### Correction de l'exercice 11 - Une équation différentielle vérifiée

Pour  $y = A \cos(2x) + B \sin(2x)$  :

$$y' = -2A \sin(2x) + 2B \cos(2x) \quad y'' = -4A \cos(2x) - 4B \sin(2x) = -4y$$

- Donc  $y'' + 4y = 0$  pour tous  $A, B$ , en particulier pour  $A = 1, B = 3$ .
- Conditions :  $y(0) = A = 1$  et  $y'(0) = 2B = 2$ , donc  $B = 1$  :  $y(x) = \cos(2x) + \sin(2x)$ .
- Une solution est déterminée par sa valeur et celle de sa dérivée en un point (théorème de Cauchy, vu au chapitre des équations différentielles).

**Réponse.** Vérifié ;  $y = \cos(2x) + \sin(2x)$ .

### Correction de l'exercice 12 - Puissances et dérivées

Chaque dérivation fait descendre l'exposant et le multiplie :

$$(x^n)^{(k)} = n(n-1)\cdots(n-k+1)x^{n-k} = \frac{n!}{(n-k)!}x^{n-k}$$

- Pour  $k = n$  :  $(x^n)^{(n)} = n!$  (constante), et donc  $(x^n)^{(n+1)} = 0$ .
- Pour  $P(x) = x^3$  :  $P(0) = P'(0) = P''(0) = 0$  et  $P'''(0) = 6 = 3!$  ; la formule donne  $\frac{3!}{3!}x^3 = x^3$ .
- Les coefficients d'un polynôme se lisent sur ses dérivées en 0.

**Réponse.**  $\frac{n!}{(n-k)!}x^{n-k}$  ;  $n!$  ; 0.

### Correction de l'exercice 13 - Concavité de la racine

Sur  $]0; +\infty[$ ,  $(\sqrt{x})'' = -\frac{1}{4x^{3/2}} < 0$  : la racine est concave (et continue en 0, ce qui permet d'inclure les bornes). L'inégalité de concavité avec  $t = \frac{1}{2}$  :

$$\sqrt{\frac{a+b}{2}} \geq \frac{\sqrt{a} + \sqrt{b}}{2}$$

- Autre preuve : on élève au carré (les deux membres sont positifs) ; l'inégalité devient  $\frac{a+b+2\sqrt{ab}}{4} \leq \frac{a+b}{2}$ , soit  $2\sqrt{ab} \leq a+b$ , déjà connu.
- Égalité si et seulement si  $a = b$ .

**Réponse.** Concavité de  $\sqrt{\phantom{x}}$  (ou élévation au carré).

### Correction de l'exercice 14 - Vrai ou faux ?

- Faux** :  $x \mapsto x$  est convexe (sa dérivée seconde est nulle) et n'est pas minorée.
- Vrai** :  $(f+g)'' = f'' + g'' \geq 0$  (et, sans dérivabilité, par sommation des inégalités de convexité).
- Faux** :  $f(x) = x$  et  $g(x) = x^2$  sont convexes, mais  $fg = x^3$  a une dérivée seconde  $6x$ , négative pour  $x < 0$ .
- Faux** :  $f(x) = x^2 \sin \frac{1}{x}$  (prolongée par 0) est dérivable, mais  $f'$  n'est pas continue en 0.

dérivable  $n$  fois  $\Rightarrow$  de classe  $C^n$

**Réponse.** a) faux · b) vrai · c) faux · d) faux.

### Correction de l'exercice 15 - Synthèse : les dérivées de $e^x \sin x$

- $f(x) = e^x(\sin x + \cos x)$  et  $\sin x + \cos x = \sqrt{2} \left( \frac{\sqrt{2}}{2} \sin x + \frac{\sqrt{2}}{2} \cos x \right) = \sqrt{2} \sin \left( x + \frac{\pi}{4} \right)$ .
- Même calcul appliqué à  $e^x \sin \left( x + \frac{n\pi}{4} \right)$  : sa dérivée est  $\sqrt{2} e^x \sin \left( x + \frac{n\pi}{4} + \frac{\pi}{4} \right)$ . Par récurrence :

$$f^{(n)}(x) = (\sqrt{2})^n e^x \sin \left( x + \frac{n\pi}{4} \right)$$

- Pour  $n = 4$  :  $(\sqrt{2})^4 = 4$  et  $\sin(x + \pi) = -\sin x$ , donc  $f^{(4)} = -4 e^x \sin x = -4f$ .

**Réponse.**  $f^{(n)} = (\sqrt{2})^n e^x \sin \left( x + \frac{n\pi}{4} \right)$  ;  $f^{(4)} = -4f$ .