

## Plaquette 4 - Études de fonctions, optimisation et inégalités

### Dérivabilité — Licence 1 (L1)

Corrections détaillées

#### Boîte à outils

##### Étude de fonction.

- Le signe de  $f$  donne les variations :  $f > 0$  sur un intervalle (sauf en des points isolés)  $\Rightarrow f$  strictement croissante.
- Extremum local en un point intérieur  $a$  :  $f'(a) = 0$  et  $f$  change de signe en  $a$ .
- Pour prouver  $f \geq g$  sur  $I$  :

$$h = f - g, \quad \min_I h \geq 0 \Rightarrow f \geq g \text{ sur } I$$

- Nombre de solutions de  $f(x) = k$  : sur chaque intervalle où  $f$  est strictement monotone, au plus une solution, et une exactement si  $k$  est entre les valeurs (ou limites) aux bornes.
- Asymptote oblique :  $f(x) - (ax + b) \rightarrow 0$  en  $\pm\infty$ .

#### Correction de l'exercice 1 - Une étude complète

- $f(-x) = -f(x)$  :  $f$  est impaire ; on l'étudie sur  $[0; +\infty[$ .
- Dérivée d'un produit :

$$f'(x) = e^{-x^2} - 2x^2 e^{-x^2} = (1 - 2x^2) e^{-x^2}$$

- Sur  $[0; +\infty[$ ,  $f$  est positive avant  $\frac{1}{\sqrt{2}}$  et négative après. Maximum :

$$f\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = \frac{1}{\sqrt{2}} e^{-1/2} = \frac{1}{\sqrt{2}e} \approx 0,429.$$

- Limite en  $+\infty$  :  $x e^{-x^2} \rightarrow 0$  (croissances comparées). Par imparité, minimum  $-\frac{1}{\sqrt{2}e}$  en  $-\frac{1}{\sqrt{2}}$ , limite 0 en  $-\infty$ .

**Réponse.** Maximum  $\frac{1}{\sqrt{2}e}$  en  $\frac{1}{\sqrt{2}}$ , minimum opposé ; limites nulles.

#### Correction de l'exercice 2 - Compter les solutions selon un paramètre

L'équation équivaut à  $g(x) = a$  avec  $g(x) = \frac{\ln x}{x}$ . On étudie  $g$  :

$$g'(x) = \frac{1 - \ln x}{x^2}$$

- $g$  croît sur  $]0; e]$  de  $-\infty$  à  $\frac{1}{e}$ , puis décroît sur  $[e; +\infty[$  de  $\frac{1}{e}$  vers 0 (sans l'atteindre).
- $a > \frac{1}{e}$  : aucune solution.  $a = \frac{1}{e}$  : une ( $x = e$ ).  $0 < a < \frac{1}{e}$  : deux (une de chaque côté de  $e$ ).  $a \leq 0$  : une (dans  $]0; 1[$ ).
- Méthode : on isole le paramètre et on lit la réponse sur le tableau de variations.

**Réponse.** 0 si  $a > \frac{1}{e}$  ; 1 si  $a = \frac{1}{e}$  ou  $a \leq 0$  ; 2 si  $0 < a < \frac{1}{e}$ .

#### Correction de l'exercice 3 - Rectangle dans un demi-disque

On note  $x \in [0; 1]$  la demi-largeur ; le sommet  $(x; y)$  est sur le cercle, donc la hauteur vaut  $\sqrt{1 - x^2}$ . L'aire est  $A(x) = 2x\sqrt{1 - x^2}$ . On maximise plutôt son carré (même point de

maximum, car  $A \geq 0$ ) :

$$A(x)^2 = 4x^2(1 - x^2) = 4(u - u^2) \quad (u = x^2 \in [0; 1])$$

—  $u - u^2$  est maximal pour  $u = \frac{1}{2}$  :  $x = \frac{\sqrt{2}}{2}$ , et  $A = 2 \times \frac{\sqrt{2}}{2} \times \frac{\sqrt{2}}{2} = 1$ .

— L'aire maximale vaut 1 : le rectangle mesure  $\sqrt{2}$  sur  $\frac{\sqrt{2}}{2}$ .

**Réponse.** Aire maximale 1, pour  $x = \frac{\sqrt{2}}{2}$ .

### Correction de l'exercice 4 - La boîte de conserve

Avec le rayon  $r$  et la hauteur  $h$  (en cm) :  $\pi r^2 h = 1\,000$ , donc  $h = \frac{1\,000}{\pi r^2}$ . La surface vaut

$$S(r) = 2\pi r^2 + 2\pi r h = 2\pi r^2 + \frac{2\,000}{r}$$

—  $S'(r) = 4\pi r - \frac{2\,000}{r^2}$ , qui s'annule pour  $r^3 = \frac{500}{\pi}$ , soit  $r \approx 5,42$  cm ;  $S'$  est négative avant, positive après : c'est un minimum.

— Alors  $h = \frac{1\,000}{\pi r^2} = 2r \approx 10,84$  cm : la boîte optimale est aussi haute que large.

— Surface minimale :  $S \approx 554$  cm<sup>2</sup>.

**Réponse.**  $r = (500/\pi)^{1/3} \approx 5,42$  cm,  $h = 2r \approx 10,84$  cm.

### Correction de l'exercice 5 - e puissance $\pi$ ou $\pi$ puissance e ?

On a vu que  $g$  atteint son maximum strict en e. Comme  $\pi \neq e$  :

$$\frac{\ln \pi}{\pi} < \frac{\ln e}{e} = \frac{1}{e}$$

— En multipliant par  $\pi e > 0$  :  $e \ln \pi < \pi$ , soit  $\ln(\pi^e) < \ln(e^\pi)$ .

— La fonction  $\ln$  étant strictement croissante :  $\pi^e < e^\pi$ .

— Contrôle :  $\pi^e \approx 22,46$  et  $e^\pi \approx 23,14$ .

**Réponse.**  $\pi^e < e^\pi$ .

### Correction de l'exercice 6 - Une asymptote oblique

Par division :  $x^2 + 1 = (x - 1)(x + 1) + 2$ , donc

$$f(x) = x + 1 + \frac{2}{x - 1}$$

—  $f(x) - (x + 1) = \frac{2}{x - 1} \rightarrow 0$  en  $\pm\infty$  : la droite est asymptote.

— Position :  $\frac{2}{x - 1} > 0$  pour  $x > 1$  (courbe au-dessus),  $< 0$  pour  $x < 1$  (courbe au-dessous).

— La droite  $x = 1$  est asymptote verticale.

**Réponse.**  $f(x) = x + 1 + \frac{2}{x - 1}$  ; au-dessus pour  $x > 1$ , au-dessous sinon.

### Correction de l'exercice 7 - Des extremums selon le paramètre

$$f'_m(x) = 3x^2 - 3m = 3(x^2 - m).$$

— Si  $m \leq 0$  :  $f'_m \geq 0$  (nulle au plus en 0) :  $f_m$  est strictement croissante, sans extremum.

— Si  $m > 0$  :  $f'_m$  s'annule en  $\pm\sqrt{m}$  et change de signe. Maximum local en  $-\sqrt{m}$ , minimum local en  $\sqrt{m}$  :

$$f_m(\pm\sqrt{m}) = \pm m\sqrt{m} \mp 3m\sqrt{m} = \mp 2m\sqrt{m}$$

- soit maximum  $2m\sqrt{m}$  et minimum  $-2m\sqrt{m}$ .
- Pour  $m = 0$ ,  $x^3$  a une dérivée nulle en 0 sans extremum.

**Réponse.** Extremums si  $m > 0$  :  $\pm 2m\sqrt{m}$  en  $\mp\sqrt{m}$ .

### Correction de l'exercice 8 - Le nombre de solutions de $x^3 - 3x = k$

$g(x) = x^3 - 3x$ ,  $g'(x) = 3(x-1)(x+1)$  :  $g$  croît sur  $] -\infty ; -1]$  de  $-\infty$  à 2, décroît sur  $[-1 ; 1]$  de 2 à -2, croît sur  $[1 ; +\infty[$  de -2 à  $+\infty$ .

$$g(-1) = 2 \quad g(1) = -2$$

- $|k| > 2$  : une seule solution.  $k = \pm 2$  : deux solutions (l'une double).  $|k| < 2$  : trois solutions, une sur chaque intervalle de monotonie.
- Exemple :  $k = 0$  donne  $x(x^2 - 3) = 0$ , trois solutions 0,  $\pm\sqrt{3}$ .

**Réponse.** 1 si  $|k| > 2$  ; 2 si  $|k| = 2$  ; 3 si  $|k| < 2$ .

### Correction de l'exercice 9 - Sinus et ses encadrements

- $h_1(x) = x - \sin x$  :  $h_1'(x) = 1 - \cos x \geq 0$  et  $h_1(0) = 0$ , donc  $h_1 \geq 0$  sur  $[0 ; +\infty[$ .
- $h_2(x) = \sin x - x + \frac{x^3}{6}$  :  $h_2(0) = 0$  et

$$h_2'(x) = \cos x - 1 + \frac{x^2}{2}$$

- On étudie  $h_2'$  :  $h_2''(x) = -\sin x + x = h_1(x) \geq 0$ , donc  $h_2'$  croît, et  $h_2'(0) = 0$  :  $h_2' \geq 0$ , puis  $h_2 \geq 0$ .
- Méthode : quand le signe de la dérivée n'est pas clair, on dérive encore, en partant des valeurs en 0.

**Réponse.** Études de  $x - \sin x$  et de  $\sin x - x + \frac{x^3}{6}$  (dérivée seconde).

### Correction de l'exercice 10 - Tangente au-dessus de $x$

Soit  $h(x) = \tan x - x$  sur  $\left[0 ; \frac{\pi}{2}\right[$ . Alors

$$h'(x) = 1 + \tan^2 x - 1 = \tan^2 x > 0 \text{ pour } x \neq 0$$

- $h$  est strictement croissante et  $h(0) = 0$  :  $h(x) > 0$  pour  $x > 0$ , soit  $\tan x > x$ .
- En combinant avec  $\sin x < x$  :  $\sin x < x < \tan x$  sur  $\left]0 ; \frac{\pi}{2}\right[$ , encadrement géométrique classique (aires dans le cercle trigonométrique).

**Réponse.**  $h' = \tan^2 > 0$  et  $h(0) = 0$ .

### Correction de l'exercice 11 - Une puissance fois une exponentielle

$$f_n'(x) = nx^{n-1}e^{-x} - x^n e^{-x} = x^{n-1}(n-x)e^{-x}.$$

- $f_n$  croît sur  $[0 ; n]$ , décroît ensuite ;  $f_n(0) = 0$  et  $f_n(x) \rightarrow 0$  en  $+\infty$ .

$$\max f_n = f_n(n) = \left(\frac{n}{e}\right)^n$$

- Pour  $n = 5$  :  $\left(\frac{5}{e}\right)^5 \approx 21,1$ , alors que  $5! = 120$ . On peut montrer que  $n! \approx \sqrt{2\pi n} \left(\frac{n}{e}\right)^n$  (formule de Stirling) : le maximum de  $f_n$  donne le bon ordre de grandeur, à un facteur  $\sqrt{2\pi n}$  près.

**Réponse.** Maximum  $(n/e)^n$  en  $x = n$ .

### Correction de l'exercice 12 - Point d'inflexion

$f(x) = 3x^2 - 6x$  et  $f'(x) = 6x - 6 = 6(x - 1)$  : négative avant 1 (fonction concave), positive après (convexe).

— Le point d'abscisse 1 est un point d'inflexion :  $f(1) = 0$  et  $f'(1) = -3$ .

$$y = f(1) + f'(1)(x - 1) = -3(x - 1)$$

— En ce point, la courbe traverse sa tangente.

—  $f$  a aussi un maximum local en 0 ( $f(0) = 2$ ) et un minimum local en 2 ( $f(2) = -2$ ), symétriques par rapport au point d'inflexion.

**Réponse.** Inflexion en  $(1; 0)$ , tangente  $y = -3x + 3$ .

### Correction de l'exercice 13 - Somme minimale

Soit  $f(x) = x + \frac{4}{x^2}$  sur  $]0; +\infty[$  :

$$f'(x) = 1 - \frac{8}{x^3} = \frac{x^3 - 8}{x^3}$$

—  $f'$  est négative sur  $]0; 2[$  et positive sur  $]2; +\infty[$  : minimum en  $x = 2$ .

— Valeur minimale :  $f(2) = 2 + 1 = 3$ .

— Contrôle :  $f(1) = 5$ ,  $f(3) = 3 + \frac{4}{9} \approx 3,44$ , bien supérieurs à 3.

**Réponse.**  $x = 2$  ; minimum 3.

### Correction de l'exercice 14 - Vrai ou faux ?

a) **Faux** : le maximum peut être atteint à une borne ;  $f(x) = x$  sur  $[0; 1]$  atteint son maximum en 1, où  $f' = 1$ .

b) **Faux** :  $-\frac{1}{x}$  a une dérivée  $\frac{1}{x^2} > 0$  sur  $\mathbb{R}^*$ , mais  $f(-1) = 1 > f(1) = -1$ . Il faut un intervalle.

c) **Vrai** :  $h = g - f$  vérifie  $h' = g' - f' \geq 0$  et  $h(0) = 0$ , donc

$$h(x) \geq h(0) = 0$$

d) **Faux** :  $x^3$  est croissante et  $3x^2$  s'annule en 0 ; une fonction constante est croissante, de dérivée nulle.

**Réponse.** a) faux · b) faux · c) vrai · d) faux.

### Correction de l'exercice 15 - Synthèse : la fonction $x \ln x - x$

a) En  $0^+$  :  $x \ln x \rightarrow 0$  (croissances comparées), donc  $f(x) \rightarrow 0$ . En  $+\infty$  :

$$f(x) = x(\ln x - 1) \rightarrow +\infty.$$

b)  $f'(x) = \ln x + 1 - 1 = \ln x$  : négative sur  $]0; 1[$ , positive ensuite. Minimum  $f(1) = -1$ .

c)  $f(x) = 0 \Leftrightarrow x(\ln x - 1) = 0 \Leftrightarrow \ln x = 1 \Leftrightarrow x = e$  (car  $x > 0$ ). En  $e$  :  $f(e) = 0$  et  $f'(e) = 1$ , d'où la tangente

$$y = x - e$$

— ( $f$  est une primitive de  $\ln$  : c'est la fonction qu'on retrouvera en intégration.)

**Réponse.** a) 0 et  $+\infty$  · b) minimum  $-1$  en 1 · c)  $x = e$ , tangente  $y = x - e$ .