

Plaquette 3 - Rolle et accroissements finis : applications

Dérivabilité — Licence 1 (L1)

Corrections détaillées

Boîte à outils

Théorèmes (f continue sur $[a; b]$, dérivable sur $]a; b[$).

— Rolle : si $f(a) = f(b)$, il existe $c \in]a; b[$ avec $f'(c) = 0$.

— Égalité des accroissements finis :

$$\exists c \in]a; b[, f(b) - f(a) = f'(c)(b - a)$$

— Inégalité : si $m \leq f' \leq M$ sur $]a; b[$, alors $m(b - a) \leq f(b) - f(a) \leq M(b - a)$.

— Si $|f'| \leq k$ sur un intervalle I , alors $|f(x) - f(y)| \leq k|x - y|$ sur I .

— Limite de la dérivée : si f est continue en a et $f'(x) \rightarrow \ell$ quand $x \rightarrow a$, alors f est dérivable en a et $f'(a) = \ell$.

Correction de l'exercice 1 - Racines d'un polynôme et de sa dérivée

Pour chaque k de 1 à $n - 1$, P est continue sur $[x_k; x_{k+1}]$, dérivable sur l'intérieur, et

$$P(x_k) = P(x_{k+1}) = 0$$

— Par le théorème de Rolle, il existe $c_k \in]x_k; x_{k+1}[$ avec $P'(c_k) = 0$.

— Les intervalles ouverts $]x_k; x_{k+1}[$ sont disjoints : les c_k sont distincts. P' a au moins $n - 1$ racines.

— Exemple : $P(x) = x^3 - x$ a les racines $-1, 0, 1$; $P'(x) = 3x^2 - 1$ s'annule en $\pm \frac{1}{\sqrt{3}}$, une dans chaque intervalle.

Réponse. Rolle entre deux racines consécutives donne $n - 1$ racines de P' .

Correction de l'exercice 2 - Au plus une racine

Par l'absurde, supposons deux racines $a < b$ dans $[-1; 1]$. Par Rolle, P' s'annulerait en un point de $]a; b[\subset]-1; 1[$. Or

$$P'(x) = 3x^2 - 3 = 3(x - 1)(x + 1) < 0 \text{ sur }]-1; 1[$$

— ce qui est une contradiction. P a donc au plus une racine dans $[-1; 1]$.

— (Plus directement : P est strictement décroissante sur $[-1; 1]$.)

— Elle en a exactement une si et seulement si $P(-1)$ et $P(1)$ sont de signes contraires ou nuls : $(c + 2)(c - 2) \leq 0$, soit $c \in [-2; 2]$.

Réponse. Rolle contredit $P' < 0$ sur $] - 1 ; 1 [$; une racine si $c \in [-2; 2]$.

Correction de l'exercice 3 - L'arctangente est 1-lipschitzienne

$\arctan$ est dérivable sur $\mathbb{R}$, de dérivée $\frac{1}{1+x^2} \in]0; 1]$. Par l'inégalité des accroissements finis :

$$|\arctan a - \arctan b| \leq \sup \frac{1}{1+x^2} \times |a - b| \leq |a - b|$$

— Avec $b = 0$ ($\arctan 0 = 0$) : $|\arctan x| \leq |x|$.

— L'égalité n'a lieu que pour $x = 0$: la dérivée vaut 1 seulement en 0.

Réponse. $|\arctan'| \leq 1$; puis $b = 0$.

Correction de l'exercice 4 - Encadrer le logarithme

On applique l'égalité des accroissements finis à $\ln$ sur $]1 ; 1 + x[$: il existe $c \in]1 ; 1 + x[$ avec

$$\ln(1 + x) - \ln 1 = \frac{1}{c} \times x$$

- Comme $1 < c < 1 + x$, on a $\frac{1}{1+x} < \frac{1}{c} < 1$, et en multipliant par $x > 0$:
- $\frac{x}{1+x} < \ln(1+x) < x$.
- Conséquence : $\frac{\ln(1+x)}{x} \rightarrow 1$ quand $x \rightarrow 0^+$, par encadrement.

Réponse. $\ln(1+x) = \frac{x}{c}$ avec $c \in]1 ; 1+x[$.

Correction de l'exercice 5 - Estimer une racine

Il existe $c \in]100 ; 101[$ tel que

$$\sqrt{101} - \sqrt{100} = \frac{1}{2\sqrt{c}} \times 1$$

- Comme $10 < \sqrt{c} < \sqrt{101} < 10,05$: $\frac{1}{20,1} < \sqrt{101} - 10 < \frac{1}{20}$.
- Soit $0,0497 < \sqrt{101} - 10 < 0,05$, donc $10,0497 < \sqrt{101} < 10,05$.
- Valeur réelle : $\sqrt{101} \approx 10,04988$. On a obtenu deux décimales exactes sans calculatrice.

Réponse. $0,0497 < \sqrt{101} - 10 < 0,05$.

Correction de l'exercice 6 - Exponentielle et tangente

Pour $x > 0$: il existe $c \in]0 ; x[$ avec $e^x - 1 = e^c x$. Comme $e^c > 1$ et $x > 0$:

$$e^x - 1 = e^c x > x$$

- Pour $x < 0$: il existe $c \in]x ; 0[$ avec $e^0 - e^x = e^c(0 - x)$. Comme $e^c < 1$ et $-x > 0$: $1 - e^x < -x$, soit $e^x > 1 + x$.
- Pour $x = 0$: égalité.
- La courbe de $\exp$ est au-dessus de sa tangente en 0, $y = 1 + x$.

Réponse. EAF sur $[0 ; x]$ ou $[x ; 0]$ selon le signe.

Correction de l'exercice 7 - Arcsinus plus arccosinus

Soit $h(x) = \arcsin x + \arccos x$, continue sur $[-1 ; 1]$ et dérivable sur $] -1 ; 1[$:

$$h'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} - \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} = 0$$

- Une fonction de dérivée nulle sur un **intervalle** est constante (conséquence de l'égalité des accroissements finis). Donc h est constante sur $] -1 ; 1[$, puis sur $[-1 ; 1]$ par continuité.
- $h(0) = 0 + \frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{2}$.
- Contrôle : $x = 1$ donne $\frac{\pi}{2} + 0$.

Réponse. $h' = 0$ sur un intervalle, $h(0) = \frac{\pi}{2}$.

Correction de l'exercice 8 - La limite de la dérivée

- Continuité : $-\frac{1}{x^2} \rightarrow -\infty$, donc $f(x) \rightarrow 0 = f(0)$.
- Pour $x \neq 0$: $f(x) = \frac{2}{x^3} e^{-1/x^2}$. Avec $t = \frac{1}{x^2} \rightarrow +\infty$, $|f(x)| = 2t^{3/2} e^{-t} \rightarrow 0$ (croissances comparées).
- Par le théorème de la limite de la dérivée (f continue en 0, $f' \rightarrow 0$) :

$$f'(0) = \lim_{x \rightarrow 0} f'(x) = 0$$

- Cette fonction est même infiniment dérivable, avec toutes ses dérivées nulles en 0 : elle est pourtant non nulle.

Réponse. $f(x) \rightarrow 0$, donc $f'(0) = 0$.

Correction de l'exercice 9 - Dérivée positive et stricte croissance

$f(x) = 1 - \cos x \geq 0$: f est croissante. Elle s'annule aux points $2k\pi$, isolés.

- Soit $a < b$; par croissance, $f(a) \leq f(b)$. Si l'on avait $f(a) = f(b)$, f serait constante sur $[a; b]$ (car $f(a) \leq f(x) \leq f(b)$), donc de dérivée nulle sur tout $]a; b[$; or f ne s'annule qu'en des points isolés.

$$f(a) = f(b) \Rightarrow f' = 0 \text{ sur }]a; b[, \text{ impossible}$$

- Donc $f(a) < f(b)$: f est strictement croissante. Règle : $f' \geq 0$ avec des zéros isolés entraîne la stricte croissance (comme x^3).

Réponse. $f' = 1 - \cos x \geq 0$, zéros isolés.

Correction de l'exercice 10 - Rolle deux fois

- Rolle sur $[a; b]$: il existe $\alpha \in]a; b[$ avec $f'(\alpha) = 0$.
- Rolle sur $[b; c]$: il existe $\beta \in]b; c[$ avec $f'(\beta) = 0$.
- Comme $\alpha < b < \beta$, Rolle appliqué à f' sur $[\alpha; \beta]$ donne

$$\exists \gamma \in]\alpha; \beta[, f''(\gamma) = 0$$

- Application : un polynôme de degré 2 non constant ne peut pas prendre trois fois la même valeur (sa dérivée seconde est une constante non nulle).

Réponse. Deux Rolle pour f , puis Rolle pour f' .

Correction de l'exercice 11 - Le logarithme est lipschitzien sur $[1; +\infty[$

Sur $[1; +\infty[$, $\ln'(t) = \frac{1}{t} \in]0; 1]$; l'inégalité des accroissements finis donne

$$|\ln x - \ln y| \leq 1 \times |x - y|$$

- Sur $]0; +\infty[$, c'est faux : $x = \frac{1}{e^2}$ et $y = \frac{1}{e}$ donnent $|\ln x - \ln y| = 1$, alors que $|x - y| \approx 0,23$.
- La dérivée $\frac{1}{t}$ n'est pas bornée près de 0 : le logarithme y varie très vite.

Réponse. Oui sur $[1; +\infty[$ ($|\ln'| \leq 1$), non sur $]0; +\infty[$.

Correction de l'exercice 12 - Vitesse de convergence d'une suite

$f(x) = \sqrt{2+x}$ laisse $[0; 2]$ stable ($f(0) = \sqrt{2}$, $f(2) = 2$), et $f(2) = 2$. Sur $[0; 2]$:

$$|f'(x)| = \frac{1}{2\sqrt{2+x}} \leq \frac{1}{2\sqrt{2}}$$

- Par l'inégalité des accroissements finis : $|u_{n+1} - 2| = |f(u_n) - f(2)| \leq \frac{1}{2\sqrt{2}}|u_n - 2|$.
- Par récurrence, $|u_n - 2| \leq \left(\frac{1}{2\sqrt{2}}\right)^n \times 2 \rightarrow 0$, car $\frac{1}{2\sqrt{2}} \approx 0,354 < 1$.
- L'erreur est divisée par près de 3 à chaque étape.

Réponse. Contraction de rapport $\frac{1}{2\sqrt{2}}$; $u_n \rightarrow 2$.

Correction de l'exercice 13 - Trouver le point c

- Pour $f(x) = x^2$: $\frac{b^2 - a^2}{b - a} = a + b = 2c$, donc $c = \frac{a + b}{2}$: le milieu de l'intervalle, quel qu'il soit.
- Pour $g(x) = x^3$ sur $[0; 1]$:

$$\frac{1 - 0}{1 - 0} = 3c^2 \Leftrightarrow c = \frac{1}{\sqrt{3}} \approx 0,577$$

- (on garde la racine positive, dans $]0; 1[$).
- Interprétation : en c , la tangente est parallèle à la corde joignant les extrémités de la courbe.

Réponse. $c = \frac{a+b}{2}$; $c = \frac{1}{\sqrt{3}}$.

Correction de l'exercice 14 - Vrai ou faux ?

- a) **Faux** : $\mathbb{R}^*$ n'est pas un intervalle. $f - g$ peut valoir 1 sur $]0; +\infty[$ et 0 sur $] - \infty; 0[$.
- b) **Vrai** (pour $a \neq b$) : c'est le théorème de Rolle.
- c) **Vrai** :

$$|f(x)| \leq |f(0)| + |f(x) - f(0)| \leq |f(0)| + |x|$$

- d) **Faux** : pour $\sin$ sur $[0; 2\pi]$, la corde est horizontale et $\cos c = 0$ en $\frac{\pi}{2}$ et en $\frac{3\pi}{2}$.

Réponse. a) faux · b) vrai · c) vrai · d) faux.

Correction de l'exercice 15 - Synthèse : encadrer $\ln(1 + x)$ et en déduire e

- a) La majoration est déjà connue. Pour la minoration, on pose $g(x) = \ln(1 + x) - x + \frac{x^2}{2}$: $g(0) = 0$ et

$$g'(x) = \frac{1}{1+x} - 1 + x = \frac{x^2}{1+x} > 0 \text{ pour } x > 0$$

- donc $g(x) > 0$ pour $x > 0$.
- b) Avec $x = \frac{1}{n}$ et en multipliant par n : $1 - \frac{1}{2n} < n \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) < 1$. Par encadrement, cette quantité tend vers 1, et par continuité de l'exponentielle, $\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \rightarrow e$.
- On a même : $e^{1 - \frac{1}{2n}} < \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n < e$.

Réponse. a) étude de g · b) $1 - \frac{1}{2n} < n \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) < 1$.