

Plaquette 2 - Calculer des dérivées, tangentes et raccords

Dérivabilité — Licence 1 (L1)

Exercices

Méthode

Sur un intervalle où la fonction est construite à partir de fonctions usuelles, on dérive avec les **règles de calcul** (produit, quotient, composée) en écrivant la formule utilisée. Aux **points à problème** (raccord de deux formules, valeur absolue, racine en 0), on revient au **taux d'accroissement** et on calcule ses limites à gauche et à droite. La **tangente** en a a pour équation $y = f(a) + f'(a)(x - a)$; pour la dérivée d'une **réci-proque**, on utilise $(f^{-1})'(y) = \frac{1}{f'(f^{-1}(y))}$, sans avoir besoin d'explicitier f^{-1} .

Exercice 1 - Trois dérivées

Dériver $f(x) = (x^2 + 1)e^{-x}$, $g(x) = \ln(x^2 + 1)$ et $h(x) = \sqrt{1 + \sin^2 x}$ sur $\mathbb{R}$. Étudier le signe de f .

Exercice 2 - Arctangente et son inverse

Dériver $\varphi(x) = \arctan x + \arctan \frac{1}{x}$ sur $]0; +\infty[$. En déduire la valeur de φ .

Exercice 3 - Dériver x puissance x

Dériver $f(x) = x^x$ sur $]0; +\infty[$, puis étudier ses variations.

Exercice 4 - Dérivée de l'arcsinus

Retrouver la dérivée de arcsin sur $] -1; 1[$ à partir de celle de sin. Pourquoi arcsin n'est-elle pas dérivable en ± 1 ?

Exercice 5 - Tangente et position

Écrire l'équation de la tangente à la courbe de $\ln$ en 1, et montrer que la courbe est au-dessous de cette tangente.

Exercice 6 - Tangentes passant par un point

Déterminer les tangentes à la parabole $y = x^2$ qui passent par le point $A(0; -1)$.

Exercice 7 - Un raccord dérivable

Soit $f(x) = x^2$ pour $x \leq 1$ et $f(x) = ax + b$ pour $x > 1$. Trouver a et b pour que f soit dérivable sur $\mathbb{R}$.

Exercice 8 - Dérivable mais pas de classe C^1

Soit $f(x) = x^2 \sin \frac{1}{x}$ pour $x \neq 0$ et $f(0) = 0$. Montrer que f est dérivable sur $\mathbb{R}$, mais que f' n'est pas continue en 0.

Exercice 9 - La racine en 0

La fonction $x \mapsto \sqrt{x}$ est-elle dérivable en 0 ? Et $x \mapsto x\sqrt{x}$?

Exercice 10 - Factoriser une dérivée

Dériver $f(x) = (x - 1)^2(x + 2)^3$ en factorisant le résultat, puis dresser le tableau de signes de f' .

Exercice 11 - Dérivée d'une réciproque sans la calculer

Soit $f(x) = x + e^x$, bijection de $\mathbb{R}$ sur $\mathbb{R}$, et $g = f^{-1}$. Calculer $g(1)$ et $g'(1)$.

Exercice 12 - Vitesse d'un mobile

Un mobile se déplace sur un axe ; sa position à l'instant $t \geq 0$ est $x(t) = t^3 - 6t^2 + 9t$ (en mètres, t en secondes). Quand s'arrête-t-il ? Dans quel sens se déplace-t-il entre ces instants ?

Exercice 13 - Dériver à partir de valeurs

On sait que $f(1) = 2$, $f'(1) = 3$, $g(2) = 5$ et $g'(2) = -1$. Calculer, en justifiant, $(g \circ f)'(1)$, $(f^2)'(1)$ et $\left(\frac{1}{f}\right)'(1)$.

Exercice 14 - Vrai ou faux ?

- a) La dérivée d'une fonction paire dérivable est impaire.
- b) Si f est dérivable en a , elle est continue en a .
- c) Si f est continue en a , elle est dérivable en a .
- d) Si $f(a) = 0$, f a un extremum local en a .

Exercice 15 - Synthèse : une réciproque reconnue

Soit $F(x) = \ln(x + \sqrt{x^2 + 1})$ sur $\mathbb{R}$.

- a) Justifier que F est définie et dérivable sur $\mathbb{R}$.
- b) Montrer que $F'(x) = \frac{1}{\sqrt{x^2 + 1}}$.
- c) En déduire que F est strictement croissante et impaire.