

Plaquette 1 - Dérivées, accroissements finis et étude de fonctions

Dérivabilité — Licence 1 (L1)

Exercices

Méthode

On dérive avec les règles usuelles, on étudie la dérivabilité en un point par le **taux de variation**, on applique **Rolle** et les **accroissements finis** pour démontrer inégalités et comptages de racines, et on dresse un tableau de variations complet.

Exercice 1 - Dérivée par la définition

Calculer $f'(1)$ pour $f(x) = \frac{1}{x}$, en revenant à la définition.

Exercice 2 - Non-dérivabilité

Étudier la dérivabilité de $f(x) = |x - 2|$ en $x = 2$.

Exercice 3 - Dérivées composées

Dériver :

a) $f(x) = \ln(x^2 + 1)$

b) $g(x) = e^{3x^2}$

c) $h(x) = \sqrt{\sin x}$ sur $]0; \pi[$

Exercice 4 - Théorème de Rolle

Soit $f(x) = x(x - 1)(x - 2)$. Combien de racines a f' ? Les localiser.

Exercice 5 - Égalité des accroissements finis

Soit $f(x) = \ln x$ sur $[1; e]$. Déterminer le réel c donné par l'EAF.

Exercice 6 - Inégalité par les accroissements finis

Démontrer que pour tout $x > 0$: $\frac{x}{1+x} \leq \ln(1+x) \leq x$.

Exercice 7 - Étude de fonction complète

Étudier $f(x) = \frac{x^2}{x-1}$ sur son domaine : variations, extremums, asymptotes.

Exercice 8 - Dérivée de la réciproque

Soit $f(x) = x^3 + x$ sur $\mathbb{R}$. Montrer que f est bijective et calculer $(f^{-1})'(2)$.

Exercice 9 - Convexité

Étudier la convexité de $f(x) = xe^x$ et préciser le point d'inflexion.

Exercice 10 - Nombre de solutions

Déterminer le nombre de solutions de $e^x = 3x$ sur $\mathbb{R}$.

Exercice 11 - Fonction dérivable de dérivée bornée

Montrer que $f(x) = \sin(x^2)$ est 1-lipschitzienne sur $\left[0; \frac{1}{2}\right]$.

Exercice 12 - Dérivées successives

Calculer la dérivée n -ième de $f(x) = \frac{1}{1-x}$ sur $] -\infty; 1[$.

Exercice 13 - Dérivable malgré la valeur absolue

Étudier la dérivabilité en 0 de $f(x) = x|x|$ et de $g(x) = |x|$. Calculer f' sur $\mathbb{R}$.

Exercice 14 - Approximation affine

À l'aide de la tangente à $x \mapsto \sqrt{x}$ en 4, donner une valeur approchée de $\sqrt{4,02}$. Comparer avec la valeur donnée par une calculatrice, et expliquer le signe de l'erreur.

Exercice 15 - Synthèse : optimisation concrète

On veut fabriquer une boîte cylindrique **fermée** de volume 1 litre en minimisant la surface de métal. Déterminer rayon et hauteur.