

Plaquette 5 - Dérivées successives, formule de Leibniz et convexité

Dérivabilité — Licence 1 (L1)

Exercices

Méthode

Pour une **dérivée n -ième**, on calcule les premières dérivées, on conjecture une formule, puis on la démontre par **récurrence** (initialisation, puis on dérive la formule au rang n). Pour un **produit**, la **formule de Leibniz** évite la récurrence : si l'un des facteurs est un polynôme, presque tous ses termes sont nuls. La **convexité** se lit sur le signe de f'' : une fonction convexe est au-dessus de ses tangentes et au-dessous de ses cordes, ce qui donne des inégalités sans calcul supplémentaire.

Exercice 1 - Les dérivées de $1/(1-x)$

Montrer par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$ et $x \neq 1$: $\left(\frac{1}{1-x}\right)^{(n)} = \frac{n!}{(1-x)^{n+1}}$.

Exercice 2 - Les dérivées du sinus

Montrer que $\sin^{(n)}(x) = \sin\left(x + \frac{n\pi}{2}\right)$ pour tout n . En déduire $\sin^{(2026)}(x)$.

Exercice 3 - Leibniz avec un polynôme

Calculer la dérivée n -ième de $f(x) = x^2 e^x$ avec la formule de Leibniz.

Exercice 4 - Les dérivées de $x \ln x$

Calculer les dérivées successives de $f(x) = x \ln x$ sur $]0; +\infty[$, et montrer que pour $n \geq 2$: $f^{(n)}(x) = \frac{(-1)^n (n-2)!}{x^{n-1}}$.

Exercice 5 - Une fonction de classe C^1 mais pas C^2

Soit $f(x) = x|x|$. Montrer que f est dérivable sur $\mathbb{R}$, que f est continue, mais que f n'est pas dérivable en 0.

Exercice 6 - Une racine double

Montrer que 1 est une racine d'ordre exactement 2 de $P(x) = x^4 - 4x + 3$, puis factoriser P .

Exercice 7 - Convexité de $x \ln x$

Montrer que $f(x) = x \ln x$ est convexe sur $]0; +\infty[$. En déduire que pour $a, b > 0$: $\frac{a \ln a + b \ln b}{2} \geq \frac{a+b}{2} \ln \frac{a+b}{2}$.

Exercice 8 - L'inégalité de Jordan

Montrer que pour tout $x \in \left[0; \frac{\pi}{2}\right] : \frac{2}{\pi}x \leq \sin x \leq x$.

Exercice 9 - Moyennes et concavité du logarithme

En utilisant la concavité de $\ln$, montrer que pour $a, b > 0 : \sqrt{ab} \leq \frac{a+b}{2}$. Généraliser à trois nombres.

Exercice 10 - Au-dessus des tangentes

Montrer, par convexité, que pour tous réels x et $a : x^2 \geq 2ax - a^2$. Retrouver ce résultat par un calcul direct.

Exercice 11 - Une équation différentielle vérifiée

Vérifier que $y(x) = \cos(2x) + 3 \sin(2x)$ vérifie $y'' + 4y = 0$. Trouver toutes les fonctions de la forme $A \cos(2x) + B \sin(2x)$ vérifiant de plus $y(0) = 1$ et $y'(0) = 2$.

Exercice 12 - Puissances et dérivées

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Calculer $(x^n)^{(k)}$ pour $0 \leq k \leq n$, puis $(x^n)^{(n)}$ et $(x^n)^{(n+1)}$. Retrouver la formule de Taylor pour les polynômes : $P(x) = \sum_{k=0}^{\deg P} \frac{P^{(k)}(0)}{k!} x^k$ sur l'exemple $P(x) = x^3$.

Exercice 13 - Concavité de la racine

Montrer que pour $a, b \geq 0 : \frac{\sqrt{a} + \sqrt{b}}{2} \leq \sqrt{\frac{a+b}{2}}$.

Exercice 14 - Vrai ou faux ?

- a) Une fonction convexe sur $\mathbb{R}$ est minorée.
- b) La somme de deux fonctions convexes est convexe.
- c) Le produit de deux fonctions convexes est convexe.
- d) Si f est dérivable n fois, $f^{(n)}$ est continue.

Exercice 15 - Synthèse : les dérivées de $e^x \sin x$

Soit $f(x) = e^x \sin x$.

- a) Montrer que $f'(x) = \sqrt{2} e^x \sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right)$.
- b) En déduire, par récurrence, $f^{(n)}(x) = (\sqrt{2})^n e^x \sin\left(x + \frac{n\pi}{4}\right)$.
- c) Montrer que $f^{(4)} = -4f$.