

Plaquette 4 - Études de fonctions, optimisation et inégalités

Dérivabilité — Licence 1 (L1)

Exercices

Méthode

Une **étude de fonction** suit un ordre fixe : domaine, dérivée factorisée, signe de la dérivée, tableau de variations avec les limites et les valeurs aux points critiques. Elle sert à **compter les solutions** d'une équation $f(x) = k$ (en lisant le tableau), à **optimiser** une grandeur (on exprime la grandeur en fonction d'une seule variable, puis on cherche son extremum), et à **démontrer une inégalité** $f \leq g$ (on étudie le signe de $g - f$, souvent par son minimum).

Exercice 1 - Une étude complète

Étudier $f(x) = x e^{-x^2}$ sur $\mathbb{R}$: parité, dérivée, variations, limites, extremums.

Exercice 2 - Compter les solutions selon un paramètre

Selon la valeur du réel a , combien l'équation $\ln x = ax$ a-t-elle de solutions sur $]0; +\infty[$?

Exercice 3 - Rectangle dans un demi-disque

Un rectangle est inscrit dans un demi-disque de rayon 1, un côté sur le diamètre. Quelle est son aire maximale ?

Exercice 4 - La boîte de conserve

Une boîte cylindrique doit contenir 1 L (1 000 cm³). Quelles dimensions minimisent la surface de métal (fond et couvercle compris) ?

Exercice 5 - e puissance π ou π puissance e ?

Sans calculatrice, comparer e^π et π^e en étudiant $g(x) = \frac{\ln x}{x}$.

Exercice 6 - Une asymptote oblique

Soit $f(x) = \frac{x^2 + 1}{x - 1}$ sur $\mathbb{R} \setminus \{1\}$. Montrer que la droite $y = x + 1$ est asymptote en $\pm\infty$ et étudier la position de la courbe.

Exercice 7 - Des extremums selon le paramètre

Soit $f_m(x) = x^3 - 3mx$ ($m \in \mathbb{R}$). Pour quelles valeurs de m la fonction a-t-elle des extremums locaux ? Les calculer.

Exercice 8 - Le nombre de solutions de $x^3 - 3x = k$

Selon la valeur du réel k , déterminer le nombre de solutions réelles de $x^3 - 3x = k$.

Exercice 9 - Sinus et ses encadrements

Montrer que pour tout $x \geq 0$: $x - \frac{x^3}{6} \leq \sin x \leq x$.

Exercice 10 - Tangente au-dessus de x

Montrer que $\tan x > x$ pour tout $x \in \left]0; \frac{\pi}{2}\right[$.

Exercice 11 - Une puissance fois une exponentielle

Pour $n \geq 1$, étudier $f_n(x) = x^n e^{-x}$ sur $[0; +\infty[$ et calculer son maximum. Comparer ce maximum à $n!$.

Exercice 12 - Point d'inflexion

Soit $f(x) = x^3 - 3x^2 + 2$. Étudier le signe de f'' et donner l'équation de la tangente au point où la concavité change.

Exercice 13 - Somme minimale

Parmi les réels $x > 0$, lequel minimise $x + \frac{4}{x^2}$? Quelle est la valeur minimale ?

Exercice 14 - Vrai ou faux ?

- a) Une fonction dérivable sur $[a; b]$ atteint son maximum en un point où f' s'annule.
- b) Si $f > 0$ sur $\mathbb{R}^*$, f est strictement croissante sur $\mathbb{R}^*$.
- c) Si $f(0) = g(0)$ et $f' \leq g'$ sur $[0; +\infty[$, alors $f \leq g$ sur $[0; +\infty[$.
- d) Une fonction croissante a une dérivée strictement positive.

Exercice 15 - Synthèse : la fonction $x \ln x - x$

Soit $f(x) = x \ln x - x$ sur $]0; +\infty[$.

- a) Déterminer les limites en 0 et en $+\infty$.
- b) Étudier les variations et le minimum.
- c) Résoudre $f(x) = 0$ et donner l'équation de la tangente en ce point.