

Plaquette 3 - Rolle et accroissements finis : applications

Dérivabilité — Licence 1 (L1)

Exercices

Méthode

Le **théorème de Rolle** sert à trouver des zéros de la dérivée (ou, par contraposée, à limiter le nombre de zéros d'une fonction). L'**égalité des accroissements finis** transforme une différence $f(b) - f(a)$ en $f'(c)(b - a)$: en **encadrant** f sur $[a; b]$, on obtient un encadrement de $f(b) - f(a)$. C'est l'outil pour démontrer des inégalités ($\ln(1 + x) \leq x$), pour estimer des quantités ($\sqrt{101} - 10$), et pour montrer qu'une fonction de dérivée nulle sur un **intervalle** est constante.

Exercice 1 - Racines d'un polynôme et de sa dérivée

Soit P un polynôme réel ayant n racines réelles distinctes $x_1 < \dots < x_n$. Montrer que P' a au moins $n - 1$ racines réelles distinctes.

Exercice 2 - Au plus une racine

Soit $c \in \mathbb{R}$. Montrer que $x^3 - 3x + c$ a au plus une racine dans $[-1; 1]$.

Exercice 3 - L'arctangente est 1-lipschitzienne

Montrer que pour tous réels a et b , $|\arctan a - \arctan b| \leq |a - b|$. En déduire que $|\arctan x| \leq |x|$.

Exercice 4 - Encadrer le logarithme

Montrer, avec l'égalité des accroissements finis, que pour tout $x > 0$:

$$\frac{x}{1+x} < \ln(1+x) < x.$$

Exercice 5 - Estimer une racine

Encadrer $\sqrt{101} - 10$ à l'aide de l'égalité des accroissements finis appliquée à $\sqrt{\cdot}$ sur $[100; 101]$.

Exercice 6 - Exponentielle et tangente

Montrer que pour tout réel x , $e^x \geq 1 + x$, en utilisant l'égalité des accroissements finis.

Exercice 7 - Arcsinus plus arccosinus

Montrer que pour tout $x \in [-1; 1]$, $\arcsin x + \arccos x = \frac{\pi}{2}$.

Exercice 8 - La limite de la dérivée

Soit $f(x) = e^{-1/x^2}$ pour $x \neq 0$ et $f(0) = 0$. Montrer que f est continue en 0, puis dérivable en 0, avec $f'(0) = 0$.

Exercice 9 - Dérivée positive et stricte croissance

Montrer que $f(x) = x - \sin x$ est strictement croissante sur $\mathbb{R}$, bien que sa dérivée s'annule une infinité de fois.

Exercice 10 - Rolle deux fois

Soit f deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$ avec $f(a) = f(b) = f(c)$ pour $a < b < c$. Montrer que f' s'annule.

Exercice 11 - Le logarithme est lipschitzien sur $[1; +\infty[$

Montrer que $|\ln x - \ln y| \leq |x - y|$ pour $x, y \geq 1$. Est-ce vrai sur $]0; +\infty[$?

Exercice 12 - Vitesse de convergence d'une suite

Soit $u_0 \in [0; 2]$ et $u_{n+1} = \sqrt{2 + u_n}$. Montrer que $|u_{n+1} - 2| \leq \frac{1}{2\sqrt{2}}|u_n - 2|$ et en déduire que $u_n \rightarrow 2$.

Exercice 13 - Trouver le point c

Déterminer un réel c donné par l'égalité des accroissements finis pour $f(x) = x^2$ sur $[a; b]$, puis pour $g(x) = x^3$ sur $[0; 1]$.

Exercice 14 - Vrai ou faux ?

- a) Si $f(x) = g'(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}^*$, alors $f - g$ est constante sur $\mathbb{R}^*$.
- b) Si f est dérivable et $f(a) = f(b)$, alors f' s'annule entre a et b .
- c) Si $|f'| \leq 1$ sur $\mathbb{R}$, alors $|f(x)| \leq |f(0)| + |x|$.
- d) Le point c des accroissements finis est unique.

Exercice 15 - Synthèse : encadrer $\ln(1 + x)$ et en déduire e

- a) Montrer que pour $x > 0$, $x - \frac{x^2}{2} < \ln(1 + x) < x$.
- b) En déduire que $\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \rightarrow e$, avec un encadrement explicite de $n \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right)$.