

Dérivabilité — L1

Définitions, règles, Rolle, accroissements finis, variations et réciproques

1. Nombre dérivé

f est dérivable en a si

$$f'(a) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$

existe et est finie.

Équivalent :

$$f(a+h) = f(a) + f'(a)h + o(h).$$

Tangente en a :

$$y = f(a) + f'(a)(x - a).$$

Unilatérales : f dérivable en un point intérieur a iff $f'_-(a) = f'_+(a)$.

2. Dérivabilité $\Rightarrow$ continuité

f dérivable en $a \Rightarrow f$ continue en a .

Réciproque fautive : $f(x) = |x|$ est continue en 0 mais

$$f'_-(0) = -1 \neq 1 = f'_+(0).$$

3. Règles de dérivation

$$(f+g)' = f' + g', \quad (\lambda f)' = \lambda f',$$

$$(fg)' = f'g + fg',$$

$$\left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f'g - fg'}{g^2} \quad (g \neq 0),$$

$$(f \circ g)' = (f' \circ g) g',$$

Usuelles :

$$(x^n)' = nx^{n-1}, \quad (e^x)' = e^x, \quad (\ln x)' = 1/x,$$

$$(\sin x)' = \cos x, \quad (\cos x)' = -\sin x.$$

4. Fonction réciproque

Si $f : I \rightarrow J$ est bijective, $y_0 = f(x_0)$, f^{-1} continue en y_0 , f dérivable en x_0 et $f'(x_0) \neq 0$, alors

$$(f^{-1})'(y_0) = \frac{1}{f'(x_0)} = \frac{1}{f'(f^{-1}(y_0))}.$$

Cas usuel : f continue et strictement monotone sur un intervalle.

5. Dérivées successives

$$f^{(0)} = f, \quad f^{(n+1)} = (f^{(n)})'.$$

$f \in C^n(I)$: dérivées jusqu'à l'ordre n et $f^{(n)}$ continue.

6. Fermat

Si a est intérieur au domaine, f dérivable en a et f a un extremum local en a , alors

$$f'(a) = 0.$$

Attention : $f'(a) = 0$ ne suffit pas pour avoir un extremum (ex. x^3 en 0).

7. Théorème de Rolle

Si $a < b$ et

- f continue sur $[a, b]$;
 - f dérivable sur $]a, b[$;
 - $f(a) = f(b)$,
- alors

$$\exists c \in]a, b[, \quad f'(c) = 0.$$

À retenir : les trois hypothèses sont indispensables.

8. TAF = égalité des accroissements finis

Si f est continue sur $[a, b]$ et dérivable sur $]a, b[$, alors

$$\exists c \in]a, b[, \quad f(b) - f(a) = f'(c)(b - a).$$

Donc

$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}.$$

Preuve-type : appliquer Rolle à f moins sa droite sécante.

9. Inégalité des accroissements finis

Si $|f'(t)| \leq M$ sur l'intervalle entre x et y , alors

$$|f(x) - f(y)| \leq M|x - y|.$$

Conséquence : si $|f'| \leq M$, alors f est M -lipschitzienne.

Exemple : $|\sin x - \sin y| \leq |x - y|$ car $|\cos| \leq 1$.

10. Signe de f' et variations

Sur un intervalle I :

- $f' \geq 0 \Rightarrow f$ croissante ;
- $f' \leq 0 \Rightarrow f$ décroissante ;
- $f' > 0 \Rightarrow f$ strictement croissante ;
- $f' < 0 \Rightarrow f$ strictement décroissante ;
- $f' = 0 \Rightarrow f$ constante.

Justification : TAF entre deux points $x < y$.

11. Existence + unicité

Pour montrer que $f(x) = 0$ possède exactement une solution sur I :

- existence : souvent TVI ;
- unicité : souvent f' de signe strict $\Rightarrow$ stricte monotonie.

12. Pièges

- Rolle sans vérifier $f(a) = f(b)$.
- TAF : le point est $c \in]a, b[$, pas forcément a ou b .
- Continue $\nRightarrow$ dérivable.
- Point fixe / extremum : $f'(a) = 0$ n'est qu'une condition nécessaire sous hypothèses.
- $(f^{-1})'$: établir d'abord la bijectivité et vérifier $f' \neq 0$.
- $f'(a) > 0$ en un seul point ne prouve aucune croissance globale.

A. Étudier la dérivabilité en a **Méthode sûre :**

1. écrire le taux d'accroissement ;
2. simplifier avant de prendre la limite ;
3. calculer la limite ;
4. si besoin, comparer les limites à gauche et à droite.

Exemple x^2 :

$$\frac{(a+h)^2 - a^2}{h} = 2a + h \rightarrow 2a.$$

B. Appliquer Rolle / TAF

Toujours écrire explicitement :

- « f est continue sur $[a, b]$ » ;
- « f est dérivable sur $]a, b[$ » ;
- pour Rolle : « $f(a) = f(b)$ ».

Puis seulement : « donc il existe $c \in]a, b[$ tel que... »**C. Prouver une monotonie**Pour $x < y$, le TAF donne

$$f(y) - f(x) = f'(c)(y - x).$$

Comme $y - x > 0$, le signe de $f(y) - f(x)$ est celui de $f'(c)$.**D. Prouver une inégalité**

Deux schémas fréquents :

- poser $g =$ membre droit – membre gauche, puis étudier g' ;
- utiliser l'IAF si l'on sait borner $|f'|$.

Exemple :

$$|\sin x - \sin y| \leq |x - y|.$$

E. Dériver une réciproque

Checklist :

- f bijective de I sur J ;
- identifier $x_0 = f^{-1}(y_0)$;
- vérifier $f'(x_0) \neq 0$;
- appliquer

$$(f^{-1})'(y_0) = \frac{1}{f'(x_0)}.$$

Ex. : $f(x) = e^x \Rightarrow (\ln)'(y) = 1/y$.**F. Tableau mental des hypothèses**

Rolle	continue sur $[a, b]$, dérivable sur $]a, b[$, $f(a) = f(b)$
TAF	continue sur $[a, b]$, dérivable sur $]a, b[$
IAF	TAF + borne sur $ f' $
Fermat	extremum local intérieur + dérivabilité
Inverse	bijektivité, continuité de l'inverse au point, $f'(x_0) \neq 0$

G. Exemple complet expressPour $f(x) = x + 1/x$ sur $]0, +\infty[$:

$$f'(x) = 1 - \frac{1}{x^2} = \frac{(x-1)(x+1)}{x^2}.$$

Donc f décroît sur $]0, 1]$ puis croît sur $[1, +\infty[$. Minimum en 1 :

$$x + \frac{1}{x} \geq 2 \quad (x > 0).$$

H. Vrai / faux éclair

- « continue $\Rightarrow$ dérivable » : **faux**.
- « dérivable $\Rightarrow$ continue » : **vrai**.
- « $f' = 0$ sur un intervalle $\Rightarrow f$ constante » : **vrai**.
- « $f'(a) = 0 \Rightarrow a$ extremum » : **faux**.
- « $f' > 0$ partout $\Rightarrow f$ strictement croissante » : **vrai**.
- « f strictement croissante $\Rightarrow f' > 0$ partout » : **faux**.

I. Rédaction attendue en L1

Ne pas écrire seulement « d'après le cours ». Nommer le théorème et vérifier ses hypothèses. Exemple :

« f est continue sur $[a, b]$ et dérivable sur $]a, b[$. Par le théorème des accroissements finis, il existe $c \in]a, b[$ tel que

$$f(b) - f(a) = f'(c)(b - a).$$

»

J. Formules à savoir sans hésiter

$$(fg)' = f'g + fg', \quad (f \circ g)' = (f' \circ g)g',$$

$$\left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f'g - fg'}{g^2}, \quad (f^{-1})' = \frac{1}{f' \circ f^{-1}},$$

$$|f(x) - f(y)| \leq M|x - y| \quad \text{si } |f'| \leq M.$$