

Dérivabilité en L1 maths

Nombre dérivé, règles de dérivation, Rolle, accroissements finis et variations

Idée directrice. En L1, dériver ne consiste plus seulement à appliquer une table de formules. On repart de la limite du taux d'accroissement, puis on démontre des résultats globaux : continuité, monotonie, existence de points où la dérivée prend une valeur imposée, contrôle des écarts et étude des fonctions réciproques.

1. Dérivabilité en un point

Soit $I \subset \mathbb{R}$ un intervalle, $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ et $a \in I$.

Définition

On dit que f est **dérivable en a** si la limite

$$\lim_{x \rightarrow a, x \neq a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$$

existe et est finie. Sa valeur est le **nombre dérivé** de f en a , noté $f'(a)$.

En posant $h = x - a$, on obtient la forme équivalente

$$f'(a) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}.$$

Le quotient

$$\frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$

est le **taux d'accroissement** entre a et $a+h$. La dérivée est donc une limite de pentes de sécantes.

Développement au premier ordre

f est dérivable en a si et seulement s'il existe un réel L et une fonction $\varepsilon(h)$ telle que $\varepsilon(h) \rightarrow 0$ lorsque $h \rightarrow 0$ et

$$f(a+h) = f(a) + Lh + h\varepsilon(h).$$

Alors $L = f'(a)$.

Cette écriture est fondamentale : au voisinage de a , la fonction est approchée au premier ordre par l'application affine

$$x \mapsto f(a) + f'(a)(x - a),$$

qui est l'équation de la tangente au graphe de f en $(a, f(a))$.

Exemple

Pour $f(x) = x^2$ et $a \in \mathbb{R}$,

$$\frac{f(a+h) - f(a)}{h} = \frac{(a+h)^2 - a^2}{h} = 2a + h \xrightarrow{h \rightarrow 0} 2a.$$

Donc $f'(a) = 2a$.

Dérivées à gauche et à droite

Si a est une extrémité ou si l'on souhaite étudier un point anguleux, on considère

$$f'_-(a) = \lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}, \quad f'_+(a) = \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}.$$

Lorsque a est intérieur à I ,

$$f \text{ dérivable en } a \iff f'_-(a) \text{ et } f'_+(a) \text{ existent et sont égales.}$$

Exemple

Pour $f(x) = |x|$ en 0 :

$$f'_-(0) = -1, \quad f'_+(0) = 1.$$

La fonction $|x|$ est continue en 0, mais elle n'y est pas dérivable.

2. Dérivabilité et continuité

Théorème

Si f est dérivable en a , alors f est continue en a .

Preuve. Par le développement au premier ordre,

$$f(a+h) - f(a) = h(f'(a) + \varepsilon(h)) \xrightarrow{h \rightarrow 0} 0.$$

Ainsi $f(a+h) \rightarrow f(a)$.

Piège classique

La réciproque est fausse. La continuité n'implique pas la dérivabilité. L'exemple standard est $f(x) = |x|$ en 0.

Interprétation locale du signe de la dérivée

Si $f'(a) > 0$, alors pour h suffisamment petit et non nul,

$$\frac{f(a+h) - f(a)}{h} > 0.$$

Cela implique notamment $f(a+h) > f(a)$ pour $h > 0$ petit et $f(a+h) < f(a)$ pour $h < 0$ petit. Attention : cette information est *locale* et ne suffit pas, à elle seule, à conclure à la croissance de f sur tout un intervalle.

3. Règles de dérivation

Supposons f et g dérivables en a , et $\lambda \in \mathbb{R}$.

Opérations

$$(f + g)'(a) = f'(a) + g'(a), \quad (\lambda f)'(a) = \lambda f'(a),$$

$$(fg)'(a) = f'(a)g(a) + f(a)g'(a).$$

Si $g(a) \neq 0$,

$$\left(\frac{f}{g}\right)'(a) = \frac{f'(a)g(a) - f(a)g'(a)}{g(a)^2}.$$

Dérivée d'une composée

Règle de la chaîne

Si g est dérivable en a et si f est dérivable en $g(a)$, alors $f \circ g$ est dérivable en a et

$$(f \circ g)'(a) = f'(g(a)) g'(a).$$

Exemple

Pour $F(x) = \exp(x^2 + 1)$,

$$F'(x) = 2x \exp(x^2 + 1).$$

Formules usuelles

Sur leurs domaines de dérivabilité :

$$(x^n)' = nx^{n-1}, \quad (e^x)' = e^x, \quad (\ln x)' = \frac{1}{x} \quad (x > 0),$$

$$(\sin x)' = \cos x, \quad (\cos x)' = -\sin x, \quad (\tan x)' = \frac{1}{\cos^2 x}.$$

Pour u dérivable et lorsque les expressions ont un sens :

$$(u^n)' = nu^{n-1}u', \quad (e^u)' = u'e^u, \quad (\ln u)' = \frac{u'}{u}.$$

4. Dérivée d'une fonction réciproque

Soit $f : I \rightarrow J$ une bijection entre intervalles. On veut dériver $f^{-1} : J \rightarrow I$.

Théorème

Soit $x_0 \in I$ et $y_0 = f(x_0)$. Supposons que f^{-1} soit continue en y_0 , que f soit dérivable en x_0 et que $f'(x_0) \neq 0$. Alors f^{-1} est dérivable en y_0 et

$$(f^{-1})'(y_0) = \frac{1}{f'(x_0)} = \frac{1}{f'(f^{-1}(y_0))}.$$

Dans le cadre usuel de L1, la continuité de f^{-1} est garantie lorsque f est continue et strictement monotone sur un intervalle.

Idée de preuve. Pour $y = f(x)$ proche de y_0 ,

$$\frac{f^{-1}(y) - f^{-1}(y_0)}{y - y_0} = \frac{x - x_0}{f(x) - f(x_0)} = \left(\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \right)^{-1}.$$

Lorsque $y \rightarrow y_0$, la continuité de f^{-1} donne $x \rightarrow x_0$, d'où la formule.

Exemple

Sur $I = \mathbb{R}$, $f(x) = e^x$ est une bijection de $\mathbb{R}$ sur $]0, +\infty[$ et $f'(x) = e^x \neq 0$. Donc, pour $y > 0$,

$$(\ln)'(y) = \frac{1}{e^{\ln y}} = \frac{1}{y}.$$

5. Dérivées successives et classes $\mathcal{C}^n$

Si f' est elle-même dérivable, on définit $f'' = (f')'$, puis par récurrence

$$f^{(0)} = f, \quad f^{(n+1)} = (f^{(n)})'.$$

Définition

Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on dit que f est de classe $\mathcal{C}^n$ sur un intervalle I si les dérivées $f', \dots, f^{(n)}$ existent sur I et si $f^{(n)}$ est continue sur I . On note $f \in \mathcal{C}^n(I)$.

On dit que $f \in \mathcal{C}^\infty(I)$ si f possède des dérivées de tout ordre sur I .

Piège classique

Être n fois dérivable n'est pas, en général, la même chose qu'être de classe $\mathcal{C}^n$: la classe $\mathcal{C}^n$ impose une condition de continuité sur la dérivée d'ordre n .

6. Extrema locaux et théorème de Fermat

Définition

On dit que f admet un **maximum local** en a s'il existe $\eta > 0$ tel que, pour tout x du domaine avec $|x - a| < \eta$,

$$f(x) \leq f(a).$$

On définit de même un minimum local.

Théorème de Fermat

Si a est un point intérieur du domaine, si f est dérivable en a et si f admet un extremum local en a , alors

$$f'(a) = 0.$$

Piège classique

La condition $f'(a) = 0$ est nécessaire sous les hypothèses du théorème, mais elle n'est pas suffisante pour avoir un extremum. Par exemple, $f(x) = x^3$ vérifie $f'(0) = 0$ sans avoir d'extremum en 0.

7. Théorème de Rolle

Lemme de Rolle

Soit $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ avec $a < b$. Si

1. f est continue sur $[a, b]$;
 2. f est dérivable sur $]a, b[$;
 3. $f(a) = f(b)$,
- alors il existe $c \in]a, b[$ tel que

$$f'(c) = 0.$$

Pourquoi ? Le théorème des bornes atteintes assure que f atteint un minimum et un maximum sur $[a, b]$. Si f est constante, tout c convient. Sinon l'un des extrema est atteint en un point intérieur, où le théorème de Fermat donne $f'(c) = 0$.

Piège classique

Il faut vérifier **les trois hypothèses**. En particulier, la dérivabilité est demandée seulement sur l'intervalle ouvert $]a, b[$, tandis que la continuité est demandée sur tout le segment $[a, b]$.

8. Égalité des accroissements finis (TAF)

Théorème des accroissements finis

Soit $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ avec $a < b$. Si f est continue sur $[a, b]$ et dérivable sur $]a, b[$, alors il existe $c \in]a, b[$ tel que

$$f(b) - f(a) = f'(c)(b - a).$$

Équivalent :

$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}.$$

Démonstration à connaître. On soustrait à f la droite sécante joignant $(a, f(a))$ et $(b, f(b))$:

$$g(x) = f(x) - \left[f(a) + \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(x - a) \right].$$

Alors $g(a) = g(b) = 0$. Rolle donne un $c \in]a, b[$ tel que $g'(c) = 0$, donc

$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}.$$

Exemple

Pour $f(x) = \ln x$ sur $[1, 2]$, il existe $c \in]1, 2[$ tel que

$$\ln 2 - \ln 1 = \frac{1}{c}(2 - 1).$$

Ainsi $\ln 2 = 1/c$ pour un certain $c \in]1, 2[$, ce qui donne notamment

$$\frac{1}{2} < \ln 2 < 1.$$

9. Inégalité des accroissements finis

Le TAF transforme une borne sur f' en une borne sur les variations de f .

Inégalité des accroissements finis

Soit f continue sur $[a, b]$ et dérivable sur $]a, b[$. Si

$$\forall x \in]a, b[, \quad |f'(x)| \leq M,$$

alors

$$|f(b) - f(a)| \leq M|b - a|.$$

Plus généralement, pour x, y dans un intervalle I , si $|f'| \leq M$ sur l'intérieur entre x et y , alors

$$|f(x) - f(y)| \leq M|x - y|.$$

Exemple

Pour tous $x, y \in \mathbb{R}$,

$$|\sin x - \sin y| \leq |x - y|,$$

car $|\cos t| \leq 1$ pour tout t .

Une fonction satisfaisant $|f(x) - f(y)| \leq M|x - y|$ est dite **M -lipschitzienne**. Ainsi, une fonction dérivable dont la dérivée est bornée par M en valeur absolue est M -lipschitzienne.

10. Signe de la dérivée et variations

Théorème

Soit f continue sur un intervalle I et dérivable sur son intérieur.

- Si $f'(x) \geq 0$ pour tout x intérieur à I , alors f est croissante sur I .
- Si $f'(x) \leq 0$ pour tout x intérieur à I , alors f est décroissante sur I .
- Si $f'(x) > 0$ pour tout x intérieur à I , alors f est strictement croissante sur I .
- Si $f'(x) < 0$ pour tout x intérieur à I , alors f est strictement décroissante sur I .

Preuve-type. Pour $x < y$ dans I , le TAF fournit $c \in]x, y[$ tel que

$$f(y) - f(x) = f'(c)(y - x).$$

Comme $y - x > 0$, le signe de $f(y) - f(x)$ est contrôlé par celui de $f'(c)$.

Dérivée nulle et fonctions constantes

Sous les mêmes hypothèses, si $f'(x) = 0$ sur l'intérieur de I , alors f est constante sur I .

Piège classique

La réciproque de « $f'(x) > 0$ partout $\Rightarrow f$ strictement croissante » est fausse. Une fonction strictement croissante peut avoir une dérivée nulle en certains points : $f(x) = x^3$ est strictement croissante sur $\mathbb{R}$ mais $f'(0) = 0$.

11. Applications classiques du TAF

Prouver une inégalité

On étudie souvent une fonction auxiliaire. Exemple : montrer que, pour $x > -1$,

$$\ln(1+x) \leq x.$$

Posons $g(x) = x - \ln(1+x)$. Alors

$$g'(x) = 1 - \frac{1}{1+x} = \frac{x}{1+x}.$$

Sur $[0, +\infty[$, $g' \geq 0$ et $g(0) = 0$, donc $g(x) \geq 0$. Sur $] -1, 0]$, on peut traiter séparément ou comparer directement les variations.

Unicité d'une solution

Si f' garde un signe strict sur un intervalle, alors f est strictement monotone, donc l'équation $f(x) = \lambda$ possède au plus une solution sur cet intervalle.

Méthode

Pour prouver qu'une équation $f(x) = 0$ possède exactement une solution sur I :

1. prouver l'existence, souvent par le théorème des valeurs intermédiaires ;
2. prouver l'unicité, souvent via le signe de f' et la stricte monotonie.

Contrôler une erreur

Si $|f'| \leq M$ sur un intervalle contenant a et x , alors

$$|f(x) - f(a)| \leq M|x - a|.$$

C'est une manière rigoureuse de dire qu'une petite erreur sur l'entrée entraîne une erreur contrôlée sur la sortie.

12. Méthode d'étude d'une fonction en L1

Checklist de rédaction

Pour une étude par la dérivée :

1. préciser le domaine de définition ;
2. calculer f' et indiquer son domaine ;
3. factoriser/simplifier f' pour en déterminer le signe ;
4. déduire les variations en citant le théorème approprié ;
5. calculer les valeurs et limites utiles aux extrémités ;
6. utiliser TVI + monotonie pour les questions d'existence et d'unicité ;
7. si une réciproque intervient, vérifier la bijectivité avant de parler de f^{-1} .

13. Exemple complet

Étutions

$$f(x) = x + \frac{1}{x}, \quad x > 0.$$

On a

$$f'(x) = 1 - \frac{1}{x^2} = \frac{(x-1)(x+1)}{x^2}.$$

Sur $]0, +\infty[$, $x^2 > 0$ et $x+1 > 0$, donc le signe de f' est celui de $x-1$. Ainsi f est décroissante sur $]0, 1]$ et croissante sur $[1, +\infty[$. Elle admet donc un minimum global en $x = 1$:

$$f(1) = 2.$$

On obtient l'inégalité classique

$$\forall x > 0, \quad x + \frac{1}{x} \geq 2.$$

14. Pièges à éviter

Piège classique

- **Rolle** : oublier l'une des trois hypothèses : continuité sur $[a, b]$, dérivabilité sur $]a, b[$, égalité $f(a) = f(b)$.
- **TAF** : écrire directement $f(b) - f(a) = f'(a)(b - a)$; le théorème fournit une dérivée en un point *inconnu* $c \in]a, b[$.
- **Continuité** : croire que « continue » implique « dérivable ».
- **Réciproque** : utiliser $(f^{-1})'$ sans avoir établi que f est bijective, ou oublier la condition $f' \neq 0$ au point considéré.
- **Variations** : croire que $f'(a) > 0$ en un seul point suffit pour conclure que f est croissante sur un intervalle.
- **Extremum** : croire que $f'(a) = 0$ suffit à produire un extremum.

15. Exercices corrigés essentiels

Exercice 1 — Dérivabilité en un point

Étudier la dérivabilité en 0 de $f(x) = |x|$.

Correction. Pour $h > 0$, $|h|/h = 1$; pour $h < 0$, $|h|/h = -1$. Les limites à droite et à gauche sont différentes, donc f n'est pas dérivable en 0.

Exercice 2 — Rolle

Montrer qu'il existe $c \in]0, \pi[$ tel que $\sin c = 0$ n'est *pas* une conclusion de Rolle appliqué à $\sin$ sur $[0, \pi]$, puis donner la véritable conclusion.

Correction. On a $\sin 0 = \sin \pi = 0$, et $\sin$ est continue puis dérivable. Rolle donne donc un $c \in]0, \pi[$ tel que $\cos c = 0$. Ici $c = \pi/2$ convient.

Exercice 3 — TAF et estimation

Montrer que pour $x \geq 0$,

$$0 \leq \sqrt{x+1} - \sqrt{x} \leq \frac{1}{2\sqrt{x}} \quad (x > 0).$$

Correction. Pour $x > 0$, appliquer le TAF à $t \mapsto \sqrt{t}$ sur $[x, x+1]$. Il existe $c \in]x, x+1[$ tel que

$$\sqrt{x+1} - \sqrt{x} = \frac{1}{2\sqrt{c}} \leq \frac{1}{2\sqrt{x}}.$$

La positivité est immédiate par croissance de la racine carrée.

Exercice 4 — Dérivée de la réciproque

Soit $f(x) = x^3 + x$ sur $\mathbb{R}$. Montrer que f est bijective puis calculer $(f^{-1})'(0)$.

Correction. $f'(x) = 3x^2 + 1 > 0$, donc f est strictement croissante. De plus $f(x) \rightarrow \pm\infty$ lorsque $x \rightarrow \pm\infty$, donc f est une bijection de $\mathbb{R}$ sur $\mathbb{R}$. Comme $f(0) = 0$,

$$(f^{-1})'(0) = \frac{1}{f'(0)} = 1.$$

16. À retenir

- La dérivée est une **limite de taux d'accroissement**.
- Dérivable $\Rightarrow$ continue, mais pas l'inverse.
- Rolle et le TAF sont des théorèmes **avec hypothèses** : toujours les vérifier avant de les utiliser.
- Le TAF relie une variation globale $f(b) - f(a)$ à une dérivée locale $f'(c)$.
- Une borne sur $|f'|$ donne une borne sur $|f(x) - f(y)|$.
- Le signe de f' permet de **démontrer** les variations de f .
- Pour une fonction réciproque, la bijectivité vient avant la formule de dérivation.