

Plaque 1 - Calcul, propriétés, Cramer et interprétation géométrique

Déterminants — Licence 1 (L1)

Corrections détaillées

Boîte à outils

Calculs de base.

$$\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc$$

$$\begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} = aei + bfg + cdh - ceg - bdi - afh \quad (\text{Sarrus})$$

- **Développement selon la ligne i** : $\det A = \sum_j (-1)^{i+j} a_{ij} \Delta_{ij}$ où Δ_{ij} est le **mineur** (on supprime la ligne i et la colonne j).
- **Matrice triangulaire** : le déterminant est le **produit des coefficients diagonaux**.

Propriétés.

- **n -linéaire alterné** par rapport aux colonnes (et aux lignes).
- Deux colonnes **égales** ou proportionnelles $\Rightarrow$ déterminant **nul**.
- $L_i \leftarrow L_i + \lambda L_j$ ($i \neq j$) **ne change pas** le déterminant.
- $L_i \leftrightarrow L_j$ **change le signe** ; $L_i \leftarrow \lambda L_i$ **multiplie par λ** .
- $\det(\lambda A) = \lambda^n \det A$; $\det(A^T) = \det A$; $\det(AB) = \det A \det B$.
- **Attention** : $\det(A+B) \neq \det A + \det B$ en général.

Applications.

- A **inversible** $\Leftrightarrow \det A \neq 0$, et alors $\det(A^{-1}) = \frac{1}{\det A}$.
- Une famille de n vecteurs de K^n est une **base** $\Leftrightarrow$ son déterminant est non nul.
- **Formules de Cramer** : si $\det A \neq 0$, la solution de $AX = B$ est $x_i = \frac{\det A_i}{\det A}$, où A_i est A avec sa i -ième colonne remplacée par B .
- **Comatrice** : $A \times \text{com}(A)^T = (\det A) I_n$.

Géométrie. En dimension 2, $|\det|$ est l'**aire** du parallélogramme ; en dimension 3, le **volume** du parallélépipède. Le **signe** donne l'orientation.

Correction de l'exercice 1 - Déterminants 2x2 et 3x3

a) $5 \times 4 - 3 \times 2 = 20 - 6 = 14$.

b) **Développement selon la deuxième ligne** (qui contient un zéro) :

$$-0 \times \Delta_{21} + 4 \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} - 1 \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix}$$

- Attention aux signes : la position (2, 2) porte le signe +, la position (2, 3) le signe -.
- Premier mineur : $4 - 3 = 1$. Second : $0 - 1 = -1$.
- **Total** : $4 \times 1 - 1 \times (-1) = 4 + 1 = 5$.

— **Contrôle par Sarrus :**

$$2 \times 4 \times 2 + 1 \times 1 \times 1 + 3 \times 0 \times 0 - 3 \times 4 \times 1 - 1 \times 0 \times 2 - 2 \times 1 \times 0 = 16 + 1 + 0 - 12 - 0 - 0 = 5$$

— **Stratégie :** développer selon la ligne ou la colonne comportant **le plus de zéros**.

Réponse. a) 14 · b) 5.

Correction de l'exercice 2 - Opérations élémentaires

On utilise $L_i \leftarrow L_i + \lambda L_j$, qui **ne change pas** la valeur.

— $L_2 \leftarrow L_2 - 2L_1 : (0, 1, 1).$

— $L_3 \leftarrow L_3 - 3L_1 : (0, 1, 2).$

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 1 \times \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 2 - 1 = 1$$

— **Résultat :** 1.

— **Contrôle par Sarrus :** $55 + 42 + 42 - 45 - 49 - 44 = 1$ ✓

— **Conséquence :** le déterminant étant non nul, la matrice est **inversible** et les trois vecteurs forment une base.

— **Efficacité :** deux opérations et un déterminant 2×2 , contre six produits triples par Sarrus — l'échelonnement est la méthode de référence dès la dimension 3.

Réponse. Le déterminant vaut 1.

Correction de l'exercice 3 - Déterminant triangulaire

— La matrice est **triangulaire supérieure**.

— Le déterminant est le **produit des coefficients diagonaux** :

$$3 \times (-1) \times 2 \times 5 = -30$$

— **Justification :** en développant successivement selon la **première colonne**, seul le coefficient diagonal survit à chaque étape.

— **Conséquence :** la matrice est **inversible** ($-30 \neq 0$), et $\det(A^{-1}) = -\frac{1}{30}$.

— **Méthode générale :** pour un grand déterminant, on **triangularise** par le pivot de Gauss — en comptant les **échanges de lignes**, qui changent le signe.

— **Cas particulier utile :** un déterminant est nul dès qu'un coefficient **diagonal** l'est, pour une matrice triangulaire.

Réponse. -30.

Correction de l'exercice 4 - Inversibilité et paramètre

— **Déterminant :** $\det A = 4 - m^2 = (2 - m)(2 + m).$

— **Inversibilité :** $\det A \neq 0$ équivaut à $m \neq 2$ et $m \neq -2$.

— **Cas $m = 2$:** $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$, dont la seconde ligne est le **double** de la première — rang 1.

— **Cas $m = -2$:** $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 4 \end{pmatrix}$, rang 1 également.

— **Conclusion :** A est inversible **si et seulement si** $|m| \neq 2$.

— **Inverse pour m admissible :**

$$A^{-1} = \frac{1}{4 - m^2} \begin{pmatrix} 4 & -m \\ -m & 1 \end{pmatrix}$$

— **Contrôle** avec $m = 0$: $A = \text{diag}(1, 4)$ et $A^{-1} = \text{diag}(1, \frac{1}{4})$ ✓

Réponse. Inversible si et seulement si $m \neq \pm 2$.

Correction de l'exercice 5 - Formules de Cramer

— **Déterminant du système** : $\det A = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -3 \end{vmatrix} = -6 - 1 = -7 \neq 0$ — système de **Cramer**.

— **Pour x** : on remplace la **première colonne** par le second membre,

$$\det A_1 = \begin{vmatrix} 5 & 1 \\ -1 & -3 \end{vmatrix} = -15 + 1 = -14, \quad x = \frac{-14}{-7} = 2$$

— **Pour y** : on remplace la **deuxième colonne**,

$$\det A_2 = \begin{vmatrix} 2 & 5 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = -2 - 5 = -7, \quad y = \frac{-7}{-7} = 1$$

— **Solution** : $(x, y) = (2, 1)$.

— **Vérifications** : $4 + 1 = 5$ ✓ et $2 - 3 = -1$ ✓

— **Usage raisonnable** : Cramer est élégant en dimension 2 ou 3, mais son coût explose ensuite ($n + 1$ déterminants d'ordre n) — au-delà, le pivot de Gauss s'impose.

Réponse. $(x, y) = (2, 1)$.

Correction de l'exercice 6 - Déterminant d'un produit

— $\det(AB) = \det A \times \det B = 4 \times (-2) = -8$.

— $\det(A^{-1}) = \frac{1}{4} = 0,25$.

— $\det(3A) = 3^3 \det A = 27 \times 4 = 108$ — **attention à la puissance n !**

— $\det(A^T B^2) = \det A \times (\det B)^2 = 4 \times 4 = 16$.

— **Piège numéro un** : $\det(3A) = 3 \det A$ est **faux** — chaque ligne est multipliée par 3, d'où le facteur 3^n .

— **Piège numéro deux** : $\det(A + B) \neq \det A + \det B$. Contre-exemple : $A = I_2$ et $B = -I_2$ donnent $\det(A + B) = 0$ alors que $1 + 1 = 2$.

— **Propriété fondamentale** : la multiplicativité $\det(AB) = \det A \det B$ est ce qui rend le déterminant si utile — elle n'a pas d'équivalent pour la somme.

Réponse. -8 ; $\frac{1}{4}$; 108 ; 16 .

Correction de l'exercice 7 - Famille de vecteurs

On calcule le déterminant de la matrice dont ces vecteurs sont les **colonnes**.

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 5 \end{vmatrix}$$

— $L_2 \leftarrow L_2 - 2L_1$: $(0, -1, -2)$; $L_3 \leftarrow L_3 - 3L_1$: $(0, -2, -4)$.

— Les deux nouvelles lignes sont **proportionnelles**, donc le déterminant est **nul**.

— **Conclusion** : la famille est **liée** — ce n'est pas une base.

— **Relation explicite** : $u_1 + u_3 = (4, 6, 8) = 2u_2$ ✓ — les vecteurs sont en **progression arithmétique**.

— **Rang** : 2 ; les trois vecteurs sont **coplanaires**, dans le plan $x - 2y + z = 0$.

— **Vérifications** : $1 - 4 + 3 = 0$ ✓ ; $2 - 6 + 4 = 0$ ✓ ; $3 - 8 + 5 = 0$ ✓

- **Signal d'alerte** : des vecteurs en progression arithmétique sont **toujours** liés dès qu'il y en a trois.

Réponse. Non : déterminant nul, $u_1 + u_3 = 2u_2$.

Correction de l'exercice 8 - Aire et volume

Aire : c'est la valeur absolue du déterminant.

- $\begin{vmatrix} 4 & 2 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = 12 - 2 = 10$, donc l'aire vaut 10 unités d'aire.
- **Contrôle** : $\|\vec{u}\| = \sqrt{17} \approx 4,12$ et $\|\vec{v}\| = \sqrt{13} \approx 3,61$; le produit vaut 14,9, et l'aire réelle (10) est inférieure — cohérent, les vecteurs n'étant pas orthogonaux ✓

Volume : déterminant 3×3 .

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 1(1 - 0) - 0 + 1(1 - 0) = 2$$

- **Volume** : 2 unités de volume.
- **Contrôle** : les trois vecteurs sont de norme $\sqrt{2}$; le produit des normes vaut $2\sqrt{2} \approx 2,83$, supérieur au volume 2 ✓
- **Cas dégénéré** : un déterminant **nul** signifie des vecteurs **coplanaires** — volume nul, parallélépipède aplati.

Réponse. Aire 10 ; volume 2.

Correction de l'exercice 9 - Déterminant de Vandermonde

- $C_2 \leftarrow C_2 - C_1$ et $C_3 \leftarrow C_3 - C_1$:

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ a & b-a & c-a \\ a^2 & b^2-a^2 & c^2-a^2 \end{vmatrix}$$

- **Développement selon la première ligne** :

$$\begin{vmatrix} b-a & c-a \\ (b-a)(b+a) & (c-a)(c+a) \end{vmatrix}$$

- On **factorise** $(b-a)$ dans la première colonne et $(c-a)$ dans la seconde :

$$(b-a)(c-a) \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ b+a & c+a \end{vmatrix} = (b-a)(c-a)(c-b)$$

- **Résultat** : $(b-a)(c-a)(c-b)$.
- **Contrôle** avec $(a, b, c) = (1, 2, 3)$: $(1)(2)(1) = 2$; et par calcul direct,

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 4 & 9 \end{vmatrix} = 1(18 - 12) - 1(9 - 3) + 1(4 - 2) = 6 - 6 + 2 = 2 \quad \checkmark$$

- **Conséquence majeure** : le déterminant est **non nul si et seulement si** a, b, c sont **deux à deux distincts** — c'est ce qui garantit l'**unicité du polynôme d'interpolation**.

Réponse. $(b-a)(c-a)(c-b)$.

Correction de l'exercice 10 - Comatrice

— **Déterminant** : $6 - 5 = 1 \neq 0$.

— **Comatrice** : $\text{com}(A)_{ij} = (-1)^{i+j} \Delta_{ij}$; pour une matrice 2×2 , le mineur d'un coefficient est le coefficient « opposé ».

$$\text{com}(A) = \begin{pmatrix} 3 & -5 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$$

— **Formule** : $A^{-1} = \frac{1}{\det A} \text{com}(A)^T = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -5 & 2 \end{pmatrix}$.

— **Vérification** :

$$AA^{-1} = \begin{pmatrix} 6 - 5 & -2 + 2 \\ 15 - 15 & -5 + 6 \end{pmatrix} = I_2 \quad \checkmark$$

— **Cohérence avec la formule directe** : échanger les diagonaux et changer le signe des autres donne bien $\begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -5 & 2 \end{pmatrix} \quad \checkmark$

— **Portée** : la formule $A \text{com}(A)^T = (\det A)I$ vaut en toute dimension, mais n'est praticable que pour $n \leq 3$ (elle demande n^2 mineurs).

Réponse. $A^{-1} = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -5 & 2 \end{pmatrix}$.

Correction de l'exercice 11 - Déterminant par blocs

La matrice est **triangulaire par blocs** :

$$M = \begin{pmatrix} A & 0 \\ C & D \end{pmatrix}, \quad A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}, \quad D = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$$

— **Propriété** : $\det M = \det A \times \det D$ — le bloc C **n'intervient pas**.

— $\det A = 4 - 6 = -2$ et $\det D = 4 - 3 = 1$.

— **Résultat** : $\det M = -2 \times 1 = -2$.

— **Justification** : en développant selon les deux premières lignes (dont les coefficients non nuls sont dans les deux premières colonnes), on retrouve exactement ce produit.

— **Attention** : la formule vaut pour un bloc **triangulaire**. Pour une matrice par blocs quelconque, $\det \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \neq \det A \det D - \det B \det C$ en général.

— **Cas particulier** : si D est inversible, $\det \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} = \det D \times \det (A - BD^{-1}C)$.

Réponse. $\det M = -2$.

Correction de l'exercice 12 - Déterminant et transposée

— **Deux propriétés** : $\det(A^T) = \det A$ et $\det(-A) = (-1)^3 \det A = -\det A$.

— **Hypothèse** : $A^T = -A$, donc

$$\det A = \det(A^T) = \det(-A) = -\det A$$

— D'où $2 \det A = 0$, soit $\det A = 0 \quad \checkmark$

— **Conclusion** : toute matrice antisymétrique de taille **impaire** est **non inversible**.

- **Exemple** : $A = \begin{pmatrix} 0 & a & b \\ -a & 0 & c \\ -b & -c & 0 \end{pmatrix}$; par Sarrus, les seuls produits sans coefficient diagonal nul sont $a \cdot c \cdot (-b)$ et $b \cdot (-a) \cdot (-c)$, d'où $\det A = -abc + abc = 0$ ✓
- **Contraste en dimension paire** : $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ est antisymétrique de déterminant $1 \neq 0$ — le résultat est propre aux dimensions **impaires**.
- **Interprétation** : Ax est toujours orthogonal à x , ce qui interdit à A d'être « inversible » en dimension impaire.

Réponse. $\det A = -\det A$ en dimension impaire, donc $\det A = 0$.

Correction de l'exercice 13 - Un déterminant 4×4 par le pivot

a) $L_2 \leftarrow L_2 - L_1, L_3 \leftarrow L_3 - L_1, L_4 \leftarrow L_4 - L_1$ (valeur inchangée), puis développement selon la première colonne :

$$\det P = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 5 & 9 \\ 3 & 9 & 19 \end{vmatrix}$$

- On recommence : $L_2 \leftarrow L_2 - 2L_1$ donne $(0, 1, 3)$, $L_3 \leftarrow L_3 - 3L_1$ donne $(0, 3, 10)$.
- Il reste $\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 10 \end{vmatrix} = 10 - 9 = 1$, donc $\det P = 1$.

b) $\det P = 1 \neq 0$: inversible. Par la comatrice, $P^{-1} = \frac{1}{\det P} \text{com}(P)^T = \text{com}(P)^T$, dont les coefficients sont des déterminants de matrices **entières** : ce sont des entiers.

c) $\det(2P) = 2^4 \det P = 16$ (taille 4) et $\det(P^3) = (\det P)^3 = 1$.

— **À retenir** : une matrice entière de déterminant ± 1 a un inverse entier ; c'est même une équivalence.

Réponse. $\det P = 1$; P^{-1} entière ; $\det(2P) = 16$, $\det(P^3) = 1$.

Correction de l'exercice 14 - Aire d'un triangle et alignement

a) $\overline{AB} = (3, 1)$ et $\overline{AC} = (1, 4)$; le triangle est la **moitié** du parallélogramme :

$$A = \frac{1}{2} \left\| \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 4 \end{vmatrix} \right\| = \frac{1}{2} |12 - 1| = \frac{11}{2}$$

b) Vecteurs $(2, 4)$ et $(3, 6)$: $\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 6 \end{vmatrix} = 12 - 12 = 0$: colinéaires, les trois points sont **alignés** (sur $y = 2x$).

c) Le déterminant est nul pour $(x, y) = (1, 2)$ ou $(4, 3)$ (deux lignes égales) et il est **affine** en (x, y) : c'est une droite passant par A et B .

— Développement selon la première ligne : $x(2 - 3) - y(1 - 4) + (3 - 8) = -x + 3y - 5$.

— Équation : $-x + 3y - 5 = 0$. **Vérification** : $-1 + 6 - 5 = 0$ ✓ et $-4 + 9 - 5 = 0$ ✓

Réponse. Aire $\frac{11}{2}$; points alignés ; (AB) : $-x + 3y - 5 = 0$.

Correction de l'exercice 15 - Synthèse : déterminant à paramètre

— **Astuce** : $C_1 \leftarrow C_1 + C_2 + C_3$ rend la première colonne **constante** égale à $x + 2$.

$$D(x) = (x+2) \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & x & 1 \\ 1 & 1 & x \end{vmatrix}$$

— Puis $L_2 \leftarrow L_2 - L_1$ et $L_3 \leftarrow L_3 - L_1$:

$$(x+2) \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & x-1 & 0 \\ 0 & 0 & x-1 \end{vmatrix} = (x+2)(x-1)^2$$

- **Inversibilité** : $D(x) \neq 0$ équivaut à $x \neq -2$ et $x \neq 1$.
- **Contrôles** : $D(0) = 2 \times 1 = 2$, et par Sarrus $0 + 1 + 1 - 0 - 0 - 0 = 2$ ✓ ;
 $D(2) = 4 \times 1 = 4$, et Sarrus donne $8 + 1 + 1 - 2 - 2 - 2 = 4$ ✓
- **Cas** $x = 1$: la matrice est pleine de 1, de rang 1 — noyau de dimension 2.
- **Cas** $x = -2$: le rang est 2, le noyau est la droite Vect(1, 1, 1) (chaque ligne somme à $-2 + 1 + 1 = 0$) ✓
- **Méthode transférable** : chercher une combinaison de colonnes qui fait apparaître un **facteur commun** est la technique reine pour les déterminants « symétriques ».

Réponse. $D(x) = (x+2)(x-1)^2$; inversible si $x \neq 1$ et $x \neq -2$.