

Plaque 4 - Comatrice, endomorphismes et géométrie

Déterminants — Licence 1 (L1)

Corrections détaillées

Boîte à outils

Comatrice : $\text{com}(A)_{ij} = (-1)^{i+j} \Delta_{ij}$ et

$$A \text{com}(A)^T = \text{com}(A)^T A = (\det A) I_n$$

- Si $\det A \neq 0$: $A^{-1} = \frac{1}{\det A} \text{com}(A)^T$.
- **Déterminant d'un endomorphisme** : $\det f = \det \text{Mat}_B(f)$, indépendant de B car $\det(P^{-1}AP) = \det A$.
- $\det(g \circ f) = \det g \det f$; f bijectif $\Leftrightarrow \det f \neq 0$.
- **Volumes** : pour $f \in L(\mathbb{R}^n)$, $\text{vol}(f(K)) = |\det f| \text{vol}(K)$.
- **Tétraèdre** $ABCD$: $\text{vol} = \frac{1}{6} |\det(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD})|$; triangle : $\frac{1}{2} |\det|$.

Correction de l'exercice 1 - Inverse 3×3 par la comatrice

a) Développement selon la première colonne :

$$1 \times (1 - 3) - 0 + 2 \times (6 + 1) = -2 + 14 = 12.$$

b) Cofacteurs (mineur avec signe $(-1)^{i+j}$) :

- Ligne 1 : $+(1 - 3) = -2$, $-(0 - 6) = 6$, $+(0 - 2) = -2$.
- Ligne 2 : $-(2 + 1) = -3$, $+(1 + 2) = 3$, $-(1 - 4) = 3$.
- Ligne 3 : $+(6 + 1) = 7$, $-(3 - 0) = -3$, $+(1 - 0) = 1$.

$$\text{com}(B) = \begin{pmatrix} -2 & 6 & -2 \\ -3 & 3 & 3 \\ 7 & -3 & 1 \end{pmatrix}, \quad B^{-1} = \frac{1}{12} \begin{pmatrix} -2 & -3 & 7 \\ 6 & 3 & -3 \\ -2 & 3 & 1 \end{pmatrix}$$

c) C'est la formule $B^{-1} = \frac{1}{\det B} \text{com}(B)^T$ (attention à la **transposée**).

d) Première ligne de B fois les colonnes de $12B^{-1}$: $-2 + 12 + 2 = 12$, $-3 + 6 - 3 = 0$, $7 - 6 - 1 = 0$: première ligne de $12I_3$ ✓

— $X = B^{-1}(12, 0, 0) = (-2, 6, -2)$. **Vérification** : $-2 + 12 + 2 = 12$ ✓, $6 - 6 = 0$ ✓, $-4 + 6 - 2 = 0$ ✓

Réponse. $\det B = 12$, $B^{-1} = \frac{1}{12} \begin{pmatrix} -2 & -3 & 7 \\ 6 & 3 & -3 \\ -2 & 3 & 1 \end{pmatrix}$; $X = (-2, 6, -2)$.

Correction de l'exercice 2 - Déterminant et rang de la comatrice

a) On prend le déterminant de $A \text{com}(A)^T = (\det A) I_n$:

$$\det A \cdot \det \text{com}(A) = (\det A)^n \Rightarrow \det \text{com}(A) = (\det A)^{n-1}$$

b) Développement de $\text{com}A$ selon la première ligne :

$$2(2 + 2) - 1(-4 - 4) - 1(4 - 4) = 8 + 8 - 0 = 16 = 4^2 \quad \checkmark$$

c) $A \text{com}(A)^T = 0$: les colonnes de $\text{com}(A)^T$ sont dans $\ker A$, de dimension 1, donc $\text{rgcom}(A) \leq 1$. Et un mineur d'ordre $n - 1$ est non nul (rang $n - 1$), donc $\text{com}A \neq 0$: rang

1.

— Exemple : $\text{com}\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & -2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$, rang 1, et ses lignes sont proportionnelles à $(2, -1)$, qui engendre $\ker A$ ✓

d) Tous les mineurs d'ordre $n - 1$ sont nuls (sinon le rang serait $\geq n - 1$) : $\text{com}A = 0$.

Réponse. $\det \text{com}A = (\det A)^{n-1}$; $\text{rgcom}A = n, 1$ ou 0 selon que $\text{rg}A = n, n - 1$ ou $\leq n - 2$.

Correction de l'exercice 3 - Déterminants d'endomorphismes de polynômes

a) $T(X^k) = (X + 1)^k = X^k + (\text{degré} < k)$: matrice triangulaire supérieure à diagonale de 1, $\det T = 1$.

b) $H(X^k) = 2^k X^k$: matrice diagonale.

$$\det H = 2^0 \times 2^1 \times \cdots \times 2^n = 2^{0+1+\cdots+n} = 2^{n(n+1)/2}$$

c) $E(X^k) = kX^k + X^k = (k + 1)X^k$: diagonale, $\det E = 1 \times 2 \times \cdots \times (n + 1) = (n + 1)!$.

d) Les trois déterminants sont non nuls : tous bijectifs.

— $\det(H^{-1} \circ E) = \frac{\det E}{\det H} = \frac{(n + 1)!}{2^{n(n+1)/2}}$. **Contrôle** $n = 1$: $H^{-1} \circ E$ a pour matrice $\text{diag}(1, 1)$ dans $(1, X)$, $\frac{2}{2} = 1$ ✓

Réponse. $\det T = 1$, $\det H = 2^{n(n+1)/2}$, $\det E = (n + 1)!$; tous bijectifs.

Correction de l'exercice 4 - Le déterminant de la transposition

a) $(M^\top)^\top = M$. Donc $(\det \tau)^2 = \det \text{id} = 1$.

b) τ fixe E_{11}, E_{22} et échange E_{12}, E_{21} :

$$\text{Mat}(\tau) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \det \tau = -1$$

— (un seul échange de colonnes ramène à I_4).

c) Dans une base formée d'une base des symétriques ($\tau = \text{id}$, dimension $\frac{n(n+1)}{2}$) et d'une base des antisymétriques ($\tau = -\text{id}$, dimension $\frac{n(n-1)}{2}$), la matrice est diagonale de 1 et de -1 : $\det \tau = (-1)^{n(n-1)/2}$. **Contrôle** $n = 2$: $(-1)^1 = -1$ ✓

d) $\frac{n(n-1)}{2}$ vaut 0, 1, 3, 6, 10, 15 pour $n = 1, \dots, 6$: $\det \tau = 1$ pour $n \in \{1, 4, 5\}$, et -1 pour $n \in \{2, 3, 6\}$.

Réponse. $\det \tau = (-1)^{n(n-1)/2}$: -1 pour $n = 2$; vaut 1 pour $n \in \{1, 4, 5\}$.

Correction de l'exercice 5 - Multiplication à droite

a) La ligne i de MA est $\sum_k m_{ik}(\text{ligne } k \text{ de } A)$, c'est-à-dire $\ell_i A$ où ℓ_i est la ligne i de M .

b) (E_{11}, E_{12}) décrit la première ligne de M . Les coordonnées de ℓA sont $A^\top \ell^\top$ (transposer la ligne en colonne). Les deux lignes évoluent indépendamment :

$$\text{Mat}(R_A) = \begin{pmatrix} A^\top & 0 \\ 0 & A^\top \end{pmatrix}$$

c) Diagonale par blocs : $\det R_A = (\det A^\top)^2 = (\det A)^2$.

d) En taille $n : n$ blocs $A^\top$, $\det R_A = (\det A)^n$. Donc R_A bijective $\Leftrightarrow \det A \neq 0 \Leftrightarrow A$ inversible (et alors $R_A^{-1} = R_{A^{-1}}$).

— **Exemple** : $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$, $\det R_A = (-2)^2 = 4$, comme pour la multiplication à gauche.

Réponse. $\text{Mat}(R_A) = \text{diag}(A^\top, A^\top)$, $\det R_A = (\det A)^2$; en taille $n : (\det A)^n$.

Correction de l'exercice 6 - Matrices orthogonales

a) $\det(Q^\top Q) = \det(Q^\top) \det Q = (\det Q)^2 = 1$.

b) $\det R_\theta = \cos^2 \theta + \sin^2 \theta = 1$; $\det S_\theta = -\cos^2 \theta - \sin^2 \theta = -1$.

c) Colonnes $(\cos \theta, \sin \theta)$ et $(\sin \theta, -\cos \theta)$: normes 1, produit scalaire $\cos \theta \sin \theta - \sin \theta \cos \theta = 0$: $S_\theta^\top S_\theta = I_2$. Comme S_θ est symétrique, $S_\theta^2 = S_\theta^\top S_\theta = I_2$.
 $\det R_\theta = 1$ (conserve l'orientation), $\det S_\theta = -1$ (la renverse)

d) Non : $\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$ a pour déterminant 1 mais n'est pas orthogonale (elle ne conserve pas les longueurs : $e_1 \mapsto 2e_1$). Le déterminant ne mesure que les **volumes**, pas les longueurs.

Réponse. $\det Q = \pm 1$; rotations : +1, réflexions : -1 ; réciproque fausse.

Correction de l'exercice 7 - Impossibilités par le déterminant

a) $(\det A)^2 = \det(A^2) = \det(-I_3) = (-1)^3 = -1$: impossible pour un réel.

b) $A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ (rotation d'un quart de tour) : $A^2 = -I_2$ et $(\det A)^2 = 1 = (-1)^2$ ✓ En dimension paire, $\det(-I_n) = 1$.

c) $(\det N)^k = \det(N^k) = 0$, donc $\det N = 0$. Ensuite, la somme télescope :

$$(I_n + N)(I_n - N + N^2 - \dots + (-1)^{k-1} N^{k-1}) = I_n + (-1)^{k-1} N^k = I_n$$

— $I_n + N$ est inversible (on peut même montrer $\det(I_n + N) = 1$).

d) $\det(AB) = \det(-BA) = (-1)^3 \det B \det A$, donc $\det A \det B = -\det A \det B$, d'où $\det A \det B = 0$: **impossible** avec A, B inversibles. (En dimension 2, $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ anticommulent.)

Réponse. $A^2 = -I_n$ impossible pour n impair ; N nilpotente : $\det N = 0$, $I + N$ inversible ; anticommutation impossible en dimension 3.

Correction de l'exercice 8 - Aires transformées par une application linéaire

a) $\det \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} = 6 - 1 = 5$.

b) Le carré unité a pour image le parallélogramme construit sur $f(e_1) = (2, 1)$ et $f(e_2) = (1, 3)$, d'aire $|\det f| \times 1 = 5$.

c) Aire de OAB : $\frac{1}{2} \times 1 \times 2 = 1$. Image : aire $5 \times 1 = 5$.

— **Contrôle direct** : $f(A) = (2, 1)$, $f(B) = (2, 6)$; $\frac{1}{2} \begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 1 & 6 \end{vmatrix} = \frac{1}{2} \times 10 = 5 \checkmark$

d) $\det = ab$, et le disque a pour aire π :

$$A(\text{ellipse}) = |ab| \times \pi = \pi ab$$

— Pour $a = b = r$: $\pi r^2 \checkmark$

Réponse. $\det f = 5$: toutes les aires sont multipliées par 5 ; triangle image d'aire 5 ; ellipse : πab .

Correction de l'exercice 9 - Volume d'un tétraèdre

a) Colonnes $(1, 2, 0)$, $(0, 1, 3)$, $(2, 0, 1)$; développement selon la première ligne de

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 1 \end{pmatrix} :$$

$$1(1 - 0) - 0 + 2(6 - 0) = 13$$

b) $\text{vol} = \frac{13}{6}$.

c) Le tétraèdre O, e_1, e_2, e_3 a pour volume $\frac{1}{3} \times \text{base} \times \text{hauteur} = \frac{1}{3} \times \frac{1}{2} \times 1 = \frac{1}{6}$, et $\det(e_1, e_2, e_3) = 1$. L'application linéaire envoyant e_1, e_2, e_3 sur $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD}$ multiplie les volumes par $|\det|$: volume $\frac{|\det|}{6}$.

d) E est dans (BCD) si et seulement si $\det(\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{BD}, \overrightarrow{BE}) = 0$. $\overrightarrow{BC} = (-1, -1, 3)$, $\overrightarrow{BD} = (1, -2, 1)$, $\overrightarrow{BE} = (2, 1, 4)$:

$$- \begin{vmatrix} -1 & 1 & 2 \\ -1 & -2 & 1 \\ 3 & 1 & 4 \end{vmatrix} = -1(-8 - 1) - 1(-4 - 3) + 2(-1 + 6) = 9 + 7 + 10 = 26 \neq 0 : E \text{ n'est pas dans le plan.}$$

Réponse. $\det = 13$, volume $\frac{13}{6}$; $E \notin (BCD)$ (déterminant 26).

Correction de l'exercice 10 - Invariants de similitude

a) $\det(P^{-1}AP) = \det P^{-1} \det A \det P = \det A$; $\text{tr}(P^{-1}(AP)) = \text{tr}((AP)P^{-1}) = \text{tr} A$.

b) Déterminants : $4 - 6 = -2$ et -2 (égaux). Traces : 5 et -1 (différentes) : **non semblables**.

c) Traces 2 et 2 , déterminants 1 et 1 . Mais $P^{-1}I_2P = I_2$ pour tout P : la seule matrice semblable à I_2 est I_2 elle-même. Donc non semblables.

d) $P^{-1}(xI_n - A)P = xI_n - P^{-1}AP$, et on applique a) :

$$\det(xI_n - P^{-1}AP) = \det(xI_n - A)$$

— **Bilan** : déterminant, trace et polynôme caractéristique sont des **conditions nécessaires** de similitude, pas suffisantes (c) le prouve).

Réponse. Mêmes $\det$, trace, $\det(xI - A)$; b) non semblables (traces $5 \neq -1$) ; c) invariants égaux mais non semblables.

Correction de l'exercice 11 - Aire d'un parallélogramme dans l'espace

a) $G = \begin{pmatrix} u \cdot u & u \cdot v \\ v \cdot u & v \cdot v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$, $\det G = 3$.

b) Lignes (1, 2) : $\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1$; lignes (1, 3) : $\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 1$; lignes (2, 3) : $\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = -1$. Somme des carrés : 3 ✓ (formule de Cauchy-Binet).

c) $u \wedge v = (0 \cdot 1 - 1 \cdot 1, 1 \cdot 0 - 1 \cdot 1, 1 \cdot 1 - 0 \cdot 0) = (-1, -1, 1)$, de norme au carré 3 : ses coordonnées sont, au signe près, les trois mineurs.

d)

$$A = \sqrt{\det(M^T M)} = \|u \wedge v\| = \sqrt{3}$$

— **Généralisation** : pour k vecteurs de $\mathbb{R}^n$, le « volume » k -dimensionnel vaut $\sqrt{\det(M^T M)}$, et $\det(M^T M) \geq 0$ avec égalité si et seulement si la famille est liée.

Réponse. $\det G = 3 = 1^2 + 1^2 + (-1)^2 = \|u \wedge v\|^2$; aire $\sqrt{3}$.

Correction de l'exercice 12 - Dérivée du déterminant en l'identité

a) $(1 + ta)(1 + td) - t^2 bc$:

$$\det(I_2 + tA) = 1 + t(a + d) + t^2(ad - bc) = 1 + t \operatorname{tr} A + t^2 \det A$$

b) Dans la formule développée, seul le produit diagonal $\prod (1 + ta_{ii})$ contient des termes de degré ≤ 1 : $1 + t(a_{11} + a_{22} + a_{33})$. Tout autre terme contient au moins deux coefficients hors diagonale, chacun multiplié par t : $O(t^2)$.

c) Immédiat : le coefficient de t est $\operatorname{tr} A$.

d) $\det M(t + h) = \det M(t) \det(I + hM^{-1}M' + o(h)) = \det M(t) (1 + h \operatorname{tr}(M^{-1}M') + o(h))$, d'où la dérivée (formule de **Jacobi**).

— **Exemple** : $M(t) = \operatorname{diag}(e^t, e^{2t})$, $\det = e^{3t}$, dérivée $3e^{3t}$; et $M^{-1}M' = \operatorname{diag}(1, 2)$, trace 3 ✓

Réponse. $\det(I + tA) = 1 + t \operatorname{tr} A + O(t^2)$; $(\det M)' = \det M \operatorname{tr}(M^{-1}M')$.

Correction de l'exercice 13 - Comatrice d'une matrice de rang 1

a) Tout mineur 2×2 de J vaut $1 - 1 = 0$.

b) $\det A = D_3(1 + \lambda, 1) = (\lambda + 3)\lambda^2$. On cherche $(\lambda I + J)(\alpha I + \beta J) = I$:

$$\lambda \alpha I + (\alpha + \lambda \beta + 3\beta)J = I \implies \alpha = \frac{1}{\lambda}, \quad \beta = -\frac{1}{\lambda(\lambda + 3)}$$

c) $\lambda = 1$: $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$, $\det A = 4$, $A^{-1} = I - \frac{1}{4}J$: coefficient diagonal $\frac{3}{4}$, hors diagonale $-\frac{1}{4}$.

— Cofacteur (1, 1) : $\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 3$, et $\frac{3}{\det A} = \frac{3}{4}$ ✓ Cofacteur (1, 2) : $-\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = -1$, et $\frac{-1}{4} = -\frac{1}{4}$ ✓

d) $\lambda = -3$: $\det A = 0$ et $\operatorname{rg} A = 2$ (mineur $\begin{vmatrix} -2 & 1 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} = 3 \neq 0$), donc $\operatorname{rg} \operatorname{com} A = 1$ (exercice 2).

Réponse. $\operatorname{com} J = 0$; $\det A = \lambda^2(\lambda + 3)$, $A^{-1} = \frac{1}{\lambda}I - \frac{1}{\lambda(\lambda + 3)}J$; $\lambda = -3$: $\operatorname{rg} \operatorname{com} A = 1$.

Correction de l'exercice 14 - Changement de variables linéaire et intégrale double

a) $\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$, déterminant $-2 - 1 = -3$.

b) P est l'image du rectangle $R = [0, 2] \times [0, 3]$ (en (u, v)) par l'**inverse**, de déterminant $-\frac{1}{3}$.

c)

$$A(P) = \left| -\frac{1}{3} \right| \times A(R) = \frac{1}{3} \times 6 = 2$$

d) Inverse : $x = \frac{2u+v}{3}$, $y = \frac{u-v}{3}$. Sommets : $(u, v) = (0, 0) \mapsto (0, 0)$; $(2, 0) \mapsto \left(\frac{4}{3}, \frac{2}{3}\right)$; $(0, 3) \mapsto (1, -1)$.

— Aire = $\left\| \begin{pmatrix} \frac{4}{3} & 1 \\ \frac{2}{3} & -1 \end{pmatrix} \right\| = \left| -\frac{4}{3} - \frac{2}{3} \right| = 2$ ✓ (C'est le principe du **jacobien** dans les changements de variables des intégrales multiples.)

Réponse. Déterminant -3 ; aire = $\frac{6}{3} = 2$.

Correction de l'exercice 15 - Synthèse : l'endomorphisme $P \mapsto P(X) + P(X + 1)$

a) $f(1) = 2$, $f(X) = 2X + 1$, $f(X^2) = X^2 + (X + 1)^2 = 2X^2 + 2X + 1$:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}, \quad \det f = 8, \quad \text{tr} f = 6$$

b) Cofacteurs : ligne 1 : $4, 0, 0$; ligne 2 : $-(2 - 0) = -2, 4, 0$; ligne 3 : $(2 - 2) = 0, -(4 - 0) = -4, 4$.

$$— A^{-1} = \frac{1}{8} \text{com}(A)^T = \frac{1}{8} \begin{pmatrix} 4 & -2 & 0 \\ 0 & 4 & -4 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{4} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}.$$

c) Troisième colonne : $P = -\frac{1}{2}X + \frac{1}{2}X^2 = \frac{X^2 - X}{2}$. **Vérification** :

$$\frac{X^2 - X}{2} + \frac{(X + 1)^2 - (X + 1)}{2} = \frac{X^2 - X + X^2 + X}{2} = X^2 \quad \checkmark$$

d) $P(X) + P(X + 1) = 2P + \Delta P$. Comme $\Delta^3 = 0$ sur $\mathbb{R}_2[X]$:

$$(2 + \Delta) \cdot \frac{1}{2} \left(1 - \frac{\Delta}{2} + \frac{\Delta^2}{4} \right) = 1 + \frac{\Delta^3}{8} = \text{id}. \quad \textbf{Contrôle} : \frac{1}{2} \left(X^2 - \frac{2X + 1}{2} + \frac{2}{4} \right) = \frac{X^2 - X}{2} \quad \checkmark$$

Réponse. $\det f = 8$, $\text{tr} f = 6$; A^{-1} triangulaire ; $P = \frac{X^2 - X}{2}$.