

Plaquette 2 - Déterminants d'ordre n : techniques et récurrences

Déterminants — Licence 1 (L1)

Corrections détaillées

Boîte à outils

Opérations : $C_i \leftarrow C_i + \lambda C_j$ ne change rien ; l'échange de deux colonnes change le signe ; factoriser une colonne sort le facteur.

- **Astuce de la somme** : si toutes les lignes ont la même somme s , alors $C_1 \leftarrow C_1 + C_2 + \dots + C_n$ fait sortir s en facteur.
- **Tridiagonal** (diagonale a , sur-diagonale b , sous-diagonale c) : développement selon la dernière colonne,

$$D_n = aD_{n-1} - bcD_{n-2}$$

- Récurrence linéaire d'ordre 2 : équation caractéristique $r^2 = ar - bc$; racines distinctes r_1, r_2 : $D_n = \lambda r_1^n + \mu r_2^n$; racine double r : $D_n = (\lambda + \mu n)r^n$.
- **Vandermonde** : $\det(x_j^i)_{0 \leq i \leq n-1} = \prod_{i < j} (x_j - x_i)$.
- **Blocs triangulaires** : $\det \begin{pmatrix} A & B \\ 0 & D \end{pmatrix} = \det A \det D$.

Correction de l'exercice 1 - Diagonale a , b partout ailleurs

a) Chaque ligne a pour somme $a + (n-1)b$. On remplace C_1 par $C_1 + C_2 + \dots + C_n$ et on factorise :

$$D_n = (a + (n-1)b) \begin{vmatrix} 1 & b & \dots & b \\ 1 & a & \dots & b \\ \vdots & & \ddots & \\ 1 & b & \dots & a \end{vmatrix}$$

— Puis $L_i \leftarrow L_i - L_1$ pour $i \geq 2$: la ligne i devient $(0, \dots, 0, a-b, 0, \dots)$. Matrice triangulaire de diagonale $1, a-b, \dots, a-b$: on obtient le résultat.

b) $n = 2$: $(a+b)(a-b) = a^2 - b^2$ ✓ Pour $n = 3$, $a = 3$, $b = 1$: formule $5 \times 2^2 = 20$; Sarrus : $27 + 1 + 1 - 3 - 3 - 3 = 20$ ✓

c) C'est $D_n(a, 1)$: inversible si et seulement si $a \neq 1$ et $a \neq 1 - n$.

d) $J_n = D_n(1, 1)$: $\det J_n = n \times 0 = 0$ ($n \geq 2$, rang 1). $J_n - nI_n = D_n(1 - n, 1)$:

$\det = 0 \times (-n)^{n-1} = 0$, car le vecteur $(1, \dots, 1)$ est dans le noyau (chaque ligne somme à 0).

Réponse. $D_n = (a + (n-1)b)(a-b)^{n-1}$; inversible ssi $a \neq b$ et $a \neq -(n-1)b$; $\det J_n = 0$.

Correction de l'exercice 2 - Le tridiagonal 2, -1

a) $D_1 = 2$, $D_2 = 4 - 1 = 3$, $D_3 = 2 \times 3 - (-1)(-1) \times 2 = 6 - 2 = 4$ (Sarrus : $8 - 2 - 2 = 4$ ✓).

b) La dernière colonne a deux coefficients non nuls : 2 (position (n, n)) et -1 (position $(n-1, n)$).

— Le premier terme donne $2D_{n-1}$. Le second, $-(-1) \times M$, où le mineur M a une dernière ligne réduite à $(0, \dots, 0, -1)$: $M = -D_{n-2}$.

$$D_n = 2D_{n-1} - (-1)(-1)D_{n-2} = 2D_{n-1} - D_{n-2}$$

c) $D_n - D_{n-1} = D_{n-1} - D_{n-2} = \dots = D_2 - D_1 = 1$: suite arithmétique de raison 1, et $D_n = D_1 + (n-1) = n+1$. (Racine double $r = 1$ de $r^2 - 2r + 1$.)

d) $D_n = n+1 \neq 0$ pour tout n . Le système $2y_i - y_{i-1} - y_{i+1} = h^2 f_i$ (schéma aux différences finies pour $-y'' = f$) a donc toujours une **unique** solution.

Réponse. $D_n = 2D_{n-1} - D_{n-2}$, $D_n = n+1$: toujours inversible.

Correction de l'exercice 3 - Une récurrence à deux racines

a) Formule du tridiagonal avec $a = 5$, $bc = 6$. $\Delta_1 = 5$, $\Delta_2 = 25 - 6 = 19$.

b) $r^2 - 5r + 6 = 0$: $r = 2$ ou 3 , donc $\Delta_n = \lambda 2^n + \mu 3^n$. Avec $\Delta_0 = 1$ (prolongement cohérent : $19 = 5 \times 5 - 6\Delta_0$) :

$$\lambda + \mu = 1, \quad 2\lambda + 3\mu = 5 \implies \mu = 3, \lambda = -2, \quad \Delta_n = 3^{n+1} - 2^{n+1}$$

c) Formule : $81 - 16 = 65$. Direct, en développant selon la première ligne : $5 \times 19 - 2 \times (3 \times 5 - 0) = 95 - 30 = 65 \checkmark$

d) Seul le **produit** bc intervient : échanger 2 et 3, ou prendre 1 et 6, ne change rien ($bc = 6$). **Conséquence** : ces matrices, bien que différentes, ont toutes le même déterminant pour chaque n .

Réponse. $\Delta_n = 3^{n+1} - 2^{n+1}$; ne dépend que du produit des coefficients hors diagonale.

Correction de l'exercice 4 - Fibonacci et déterminant

a) $F_1 = 1$, $F_2 = 1 - (1)(-1) = 2$, $F_3 = F_2 + F_1 = 3$ (Sarrus : $1 + 0 + 0 - 0 - (-1) - (-1) = 3 \checkmark$).

b) Formule du tridiagonal : $F_n = 1 \cdot F_{n-1} - (1)(-1)F_{n-2} = F_{n-1} + F_{n-2}$.

c) $F_1 = 1 = \varphi_2$, $F_2 = 2 = \varphi_3$ dans la suite $\varphi_1 = \varphi_2 = 1$, et même récurrence : $F_n = \varphi_{n+1}$. Suite : 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21 : $F_7 = 21$.

d) Avec $b = c = 1$: $G_n = G_{n-1} - G_{n-2}$, $G_1 = 1$, $G_2 = 0$. Suite 1, 0, -1, -1, 0, 1, 1, 0, ... :

$$G_{n+3} = G_{n+2} - G_{n+1} = -G_n \implies G_{n+6} = G_n$$

— Les racines de $r^2 - r + 1$ sont $e^{\pm i\pi/3}$, de module 1 et d'argument $\frac{\pi}{3}$: d'où la période 6.

Un signe change tout : croissance exponentielle d'un côté, périodicité de l'autre.

Réponse. $F_n = F_{n-1} + F_{n-2}$, $F_7 = 21$; avec +1 des deux côtés, période 6 : 1, 0, -1, -1, 0, 1.

Correction de l'exercice 5 - Vandermonde d'ordre n

a) X n'apparaît que dans la dernière colonne ($1, X, \dots, X^{n-1}$) ; en développant selon cette colonne, P est un polynôme de degré $\leq n-1$. Pour $X = x_k$ ($k \leq n-1$), deux colonnes sont égales : $P(x_k) = 0$.

b) Le coefficient de X^{n-1} est le cofacteur de la position (n, n) : $V(x_1, \dots, x_{n-1})$. Si les x_i sont distincts, P a $n-1$ racines connues :

$$P(X) = V(x_1, \dots, x_{n-1}) \prod_{i=1}^{n-1} (X - x_i)$$

— (Si deux x_i coïncident, les deux membres sont nuls.) On prend $X = x_n$.

c) Récurrence immédiate à partir de $V(x_1) = 1$.

$$V(0, 1, 2, 3) = (1-0)(2-0)(3-0)(2-1)(3-1)(3-2) = 1 \times 2 \times 3 \times 1 \times 2 \times 1 = 12.$$

d) Un facteur par paire $i < j$: $\binom{n}{2} = \frac{n(n-1)}{2}$ facteurs (6 pour $n = 4 \checkmark$).

Réponse. $V = \prod_{i < j} (x_j - x_i)$ ($\binom{n}{2}$ facteurs) ; $V(0, 1, 2, 3) = 12$.

Correction de l'exercice 6 - La matrice des minimums

a) $M_4 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 3 & 3 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \end{pmatrix}$.

b) La ligne i est $(1, 2, \dots, i-1, i, i, \dots, i)$. La différence $L_i - L_{i-1}$ vaut $(0, \dots, 0, 1, 1, \dots, 1)$ (le premier 1 en position i). En partant du bas, chaque opération utilise une ligne **pas encore modifiée** :

$$\det M_n = \begin{vmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ 0 & 1 & \dots & 1 \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & 1 \end{vmatrix} = 1$$

c) $(LL^T)_{ij} = \sum_k L_{ik}L_{jk}$: nombre de k tels que $k \leq i$ et $k \leq j$, soit $\min(i, j)$ ✓

d) $\det M_n = \det L \det L^T = 1 \times 1 = 1$ (triangulaires à diagonale de 1).

— **Remarque** : l'ordre des opérations en b) compte : en commençant par le haut, on soustrairait des lignes déjà modifiées.

Réponse. $\det M_n = 1$; $M_n = LL^T$ avec L triangulaire de 1.

Correction de l'exercice 7 - La matrice des distances $|i - j|$

a) $\det A_2 = \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = -1$. $A_3 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$, Sarrus : $0 + 2 + 2 - 0 - 0 - 0 = 4$.

b) Les colonnes de A_4 : $(0, 1, 2, 3)$, $(1, 0, 1, 2)$, $(2, 1, 0, 1)$, $(3, 2, 1, 0)$. Les différences valent :

$$\begin{pmatrix} -1 & -1 & -1 & 3 \\ 1 & -1 & -1 & 2 \\ 1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

c) $L_2 \leftarrow L_2 + L_1$, $L_3 \leftarrow L_3 + L_1$, $L_4 \leftarrow L_4 + L_1$: lignes $(0, -2, -2, 5)$, $(0, 0, -2, 4)$, $(0, 0, 0, 3)$.
Triangulaire :

— $\det A_4 = (-1) \times (-2) \times (-2) \times 3 = -12$.

d) $n = 2$: $(-1) \times 1 \times 1 = -1$ ✓ ; $n = 3$: $(+1) \times 2 \times 2 = 4$ ✓ ; $n = 4$: $(-1) \times 3 \times 4 = -12$ ✓
(La méthode de b)-c) se généralise telle quelle.)

Réponse. $\det A_2 = -1$, $\det A_3 = 4$, $\det A_4 = -12$; $\det A_n = (-1)^{n-1} (n-1) 2^{n-2}$.

Correction de l'exercice 8 - Déterminant circulant d'ordre 3

a) Sarrus : $a^3 + b^3 + c^3 - abc - abc - abc = a^3 + b^3 + c^3 - 3abc$.

b) $C_1 \leftarrow C_1 + C_2 + C_3$: colonne constante $a + b + c$.

$$\det C = (a + b + c) \begin{vmatrix} 1 & b & c \\ 1 & a & b \\ 1 & c & a \end{vmatrix}$$

c) $L_2 \leftarrow L_2 - L_1, L_3 \leftarrow L_3 - L_1$ puis développement : $\begin{vmatrix} a-b & b-c \\ c-b & a-c \end{vmatrix} = (a-b)(a-c) + (b-c)^2$

$$= a^2 - ac - ab + bc + b^2 - 2bc + c^2 = a^2 + b^2 + c^2 - ab - bc - ca \quad \checkmark$$

d) Développer les trois carrés donne $2a^2 + 2b^2 + 2c^2 - 2ab - 2bc - 2ca \quad \checkmark$. Ce facteur est nul si et seulement si $a = b = c$.

— **Conclusion** : C est inversible si et seulement si $a + b + c \neq 0$ et a, b, c ne sont pas tous égaux.

Réponse. $\det C = (a + b + c)(a^2 + b^2 + c^2 - ab - bc - ca)$; inversible ssi $a + b + c \neq 0$ et non $a = b = c$.

Correction de l'exercice 9 - Matrice en flèche

a) La nouvelle première colonne vaut $(a_0 - \sum \frac{1}{a_i}, 0, 0, 0)$: ligne $i \geq 1, 1 - \frac{1}{a_i}a_i = 0$. La matrice devient triangulaire supérieure.

b) Produit des coefficients diagonaux :

$$\det A = \left(a_0 - \frac{1}{a_1} - \frac{1}{a_2} - \frac{1}{a_3}\right)a_1a_2a_3$$

c) Formule : $1 \times 2 \times \left(4 - 1 - \frac{1}{2}\right) = 2 \times \frac{5}{2} = 5$. Sarrus sur $\begin{pmatrix} 4 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$:

$$8 + 0 + 0 - 1 - 0 - 2 = 5 \quad \checkmark$$

d) $\det = a_0 - 3$: non inversible pour $a_0 = 3$. **Vérification** : le vecteur $(1, -1, -1, -1)$ est alors dans le noyau ($3 - 3 = 0$ et $1 - 1 = 0$ pour les autres lignes) $\checkmark$

Réponse. $\det A = a_1a_2a_3\left(a_0 - \sum \frac{1}{a_i}\right)$; exemple : 5 ; non inversible pour $a_0 = 3$.

Correction de l'exercice 10 - Déterminant par blocs symétriques

a) Les opérations sur colonnes $C_j \leftarrow C_j + C_{j+n}$ ne changent pas le déterminant :

$$\det M = \begin{vmatrix} A+B & B \\ B+A & A \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} A+B & B \\ 0 & A-B \end{vmatrix} = \det(A+B) \det(A-B)$$

— (seconde égalité : $L_{i+n} \leftarrow L_{i+n} - L_i$; troisième : triangulaire par blocs).

b) $A+B = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$ (dét. 8), $A-B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ (dét. 0) : $\det M = 0$.

c) Dans b), $(\det A)^2 - (\det B)^2 = 9 - 1 = 8 \neq 0$. Les blocs ne se manipulent pas comme des nombres (non commutativité).

d) $n = 1$: $\begin{vmatrix} a & b \\ b & a \end{vmatrix} = a^2 - b^2 = (a+b)(a-b) \quad \checkmark$

Réponse. $\det M = \det(A+B) \det(A-B)$; exemple : 0 ; pas $(\det A)^2 - (\det B)^2$.

Correction de l'exercice 11 - Matrices de rang au plus 2

a) $C_j - C_{j-1} = (1, 1, \dots, 1)$ pour tout $j \geq 2$: $C_3 - C_2 = C_2 - C_1$, soit $C_1 - 2C_2 + C_3 = 0$. Relation de dépendance entre colonnes : déterminant nul.

b) La colonne j vaut $X + y_j U$ avec $X = (x_1, \dots, x_n)$ et $U = (1, \dots, 1)$: toutes les colonnes sont dans $\text{Vect}(X, U)$, de dimension ≤ 2 .

c) $n = 2$:

$$\begin{vmatrix} x_1 + y_1 & x_1 + y_2 \\ x_2 + y_1 & x_2 + y_2 \end{vmatrix} = (x_1 + y_1)(x_2 + y_2) - (x_1 + y_2)(x_2 + y_1) = (x_1 - x_2)(y_2 - y_1)$$

— (après développement, x_1x_2 et y_1y_2 se simplifient, il reste $x_1y_2 + y_1x_2 - x_1y_1 - x_2y_2$.)

d) Colonne $j = y_jX$: rang ≤ 1 , déterminant nul dès $n \geq 2$.

Réponse. Rang ≤ 2 donc déterminant nul pour $n \geq 3$; pour $n = 2$: $(x_1 - x_2)(y_2 - y_1)$; $\det(x_i y_j) = 0$.

Correction de l'exercice 12 - Polynôme caractéristique d'un tridiagonal

a) Avec $t = x - 2$: $\chi = \begin{vmatrix} t & -1 & 0 \\ -1 & t & -1 \\ 0 & -1 & t \end{vmatrix} = t(t^2 - 1) + 1 \cdot (-t) = t^3 - 2t$.

$$\chi(x) = (x - 2)((x - 2)^2 - 2) = (x - 2)(x^2 - 4x + 2)$$

b) $x = 2$ et $x = 2 \pm \sqrt{2}$.

c) $\chi(\lambda) = 0 \Leftrightarrow \det(\lambda I - A) = 0$: non inversible. Pour $\lambda = 2$: $A - 2I = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$, noyau :

$y = 0, x + z = 0$: $(1, 0, -1)$. **Vérification** : $A(1, 0, -1) = (2, 0, -2)$ ✓

d) Somme : $2 + 4 = 6 = \text{tr}A$ ✓ Produit : $2 \times (4 - 2) = 4$; $\det A = \chi(0) \times (-1)^3$, et $\chi(0) = (-2)(2) = -4$, d'où $\det A = 4$ ✓

Réponse. $\chi(x) = (x - 2)(x^2 - 4x + 2)$, racines $2, 2 \pm \sqrt{2}$; noyau de $A - 2I$: $\text{Vect}(1, 0, -1)$.

Correction de l'exercice 13 - Matrice de Hilbert d'ordre 3

a) $H = \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{4} & \frac{1}{5} \end{pmatrix}$. On multiplie les lignes par 6, 12, 60 (facteur global 4320) :

$$4320 \det H = \begin{vmatrix} 6 & 3 & 2 \\ 6 & 4 & 3 \\ 20 & 15 & 12 \end{vmatrix}$$

— Développement selon la première colonne :

$$6(48 - 45) - 6(36 - 30) + 20(9 - 8) = 18 - 36 + 20 = 2.$$

— $\det H = \frac{2}{4320} = \frac{1}{2160}$.

b) Non nul : inversible, et $\det H^{-1} = 2160 \in \mathbb{N}$.

c) Un déterminant minuscule signale une matrice **presque singulière** : une petite erreur sur B (arrondi) produit une grande erreur sur X (ici H^{-1} a des coefficients allant jusqu'à 192).

d) $\int_0^1 t^{i+j-2} dt = \frac{1}{i+j-1}$ ✓ (c'est une matrice de Gram, d'où son inversibilité en toute taille).

Réponse. $\det H = \frac{1}{2160}$; inversible, $\det H^{-1} = 2160$; matrice mal conditionnée.

Correction de l'exercice 14 - Déterminant d'une matrice de permutation

a) Colonnes e_2, e_3, e_1, e_4 :

$$P_\sigma = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

— Échanger C_1 et C_3 donne (e_1, e_3, e_2, e_4) , puis $C_2 \leftrightarrow C_3$ donne I_4 : deux échanges, $\det P_\sigma = (-1)^2 = 1$.

b) Toute permutation se ramène à l'identité par des échanges (tri) ; chacun change le signe : $\det P_\sigma = (-1)^k$, la **signature** de σ .

c) Un cycle de longueur 4 se décompose en 3 échanges : $\det = (-1)^3 = -1$. (Plus généralement, un cycle de longueur ℓ a pour signature $(-1)^{\ell-1}$.)

d) Un terme par permutation : $4! = 24$ termes, chacun produit de 4 coefficients (un par ligne et par colonne), affecté de la signature. C'est pourquoi on ne développe jamais « à la main » au-delà de 3×3 .

Réponse. $\det P_\sigma = \text{signature}$: +1 pour le 3-cycle, -1 pour le 4-cycle ; 24 termes en taille 4.

Correction de l'exercice 15 - Synthèse : la matrice des pgcd

a) $G_4 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 4 \end{pmatrix} \cdot L_i \leftarrow L_i - L_1 :$

$$\det G_4 = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 3 \end{vmatrix} = 1(6 - 0) - 0 + 1(0 - 2) = 4$$

b) $k \mid i$ impose $k \leq i$: $L_{ik} = 0$ pour $k > i$ (triangulaire inférieure), et $i \mid i$: diagonale de 1.

c) $\det G_n = \det L \cdot \det \Phi \cdot \det L^\top = \prod \varphi(k)$. Pour $n = 4$: $\varphi(1)\varphi(2)\varphi(3)\varphi(4) = 1 \times 1 \times 2 \times 2 = 4$
✓

— (La factorisation vient de $\text{pgcd}(i, j) = \sum_{k \mid i, k \mid j} \varphi(k)$, identité de Gauss $\sum_{k \mid m} \varphi(k) = m$.)

d) $\varphi(5) = 4$, $\varphi(6) = 2$: $\det G_6 = 4 \times 4 \times 2 = 32$.

Réponse. $\det G_4 = 4$; $\det G_n = \prod_{k=1}^n \varphi(k)$; $\det G_6 = 32$.