

Plaquette 5 - Problèmes de synthèse sur les déterminants

Déterminants — Licence 1 (L1)

Corrections détaillées

Boîte à outils

Condition d'existence : un système homogène carré a une solution non nulle $\Leftrightarrow$ son déterminant est nul. C'est l'outil pour écrire une **équation** de courbe ou de surface passant par des points donnés.

— **Complément de Schur** (D inversible) :

$$\det \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} = \det D \cdot \det (A - BD^{-1}C)$$

— **Lemme du déterminant** : $\det(I_n + uv^T) = 1 + v^T u$.

— **Aire d'un polygone** $P_1 \cdots P_m$ (sommets dans l'ordre) : $\frac{1}{2} \left| \sum_i \det(\overrightarrow{OP_i}, \overrightarrow{OP_{i+1}}) \right|$ (formule du lacet).

— **Multiplicativité** : $\det(A^n) = (\det A)^n$, utile pour des identités sur des suites définies par une matrice.

Correction de l'exercice 1 - Le cercle passant par trois points

a) (x, y) est sur le cercle si et seulement si le système homogène en $(\alpha, \beta, \gamma, \delta)$ formé par les quatre points a une solution **non nulle**, c'est-à-dire si le déterminant est nul (développé selon la première ligne, c'est bien une équation du type voulu).

b) Lignes fixes : $(0, 0, 0, 1)$, $(4, 2, 0, 1)$, $(16, 0, 4, 1)$. Cofacteurs :

— de $x^2 + y^2$: $\begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \\ 0 & 4 & 1 \end{vmatrix} = 1 \times (8 - 0) = 8$;

— de x : $-\begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 4 & 0 & 1 \\ 16 & 4 & 1 \end{vmatrix} = -16$; de y : $+\begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 4 & 2 & 1 \\ 16 & 0 & 1 \end{vmatrix} = -32$; de 1 : 0 (le mineur contient la ligne nulle $(0, 0, 0)$ issue de P_1).

c) $8(x^2 + y^2) - 16x - 32y = 0$, soit

$$x^2 + y^2 - 2x - 4y = 0 \Leftrightarrow (x - 1)^2 + (y - 2)^2 = 5$$

— Centre $(1, 2)$, rayon $\sqrt{5}$. **Vérification** : $(2, 0)$: $1 + 4 = 5$ ✓ ; $(0, 4)$: $1 + 4 = 5$ ✓ ; $(0, 0)$: $1 + 4 = 5$ ✓

d) Le cofacteur de $x^2 + y^2$ est $\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix}$, nul si les points sont alignés : l'équation

dégénère en celle de la **droite** qui les porte.

Réponse. $x^2 + y^2 - 2x - 4y = 0$: centre $(1, 2)$, rayon $\sqrt{5}$; points alignés : on obtient la droite.

Correction de l'exercice 2 - Plan passant par trois points

a) $M \in (ABC) \Leftrightarrow \overrightarrow{AM}$ est combinaison de $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}$ (libres) $\Leftrightarrow$ les trois vecteurs sont liés $\Leftrightarrow$

déterminant nul.

b) $\overrightarrow{AM} = (x-1, y, z)$, $\overrightarrow{AB} = (-1, 2, 0)$, $\overrightarrow{AC} = (-1, 0, 3)$. Développement selon la première colonne :

$$\begin{vmatrix} x-1 & -1 & -1 \\ y & 2 & 0 \\ z & 0 & 3 \end{vmatrix} = (x-1) \times 6 - y \times (-3-0) + z \times (0+2) = 6x + 3y + 2z - 6$$

— Équation : $6x + 3y + 2z = 6$.

c) En divisant par 6 : $x + \frac{y}{2} + \frac{z}{3} = 1$ ✓ En général, $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1$ (équation « segmentaire »), et chaque point la vérifie évidemment.

d) $\text{vol} = \frac{1}{6} |\det(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}, \overrightarrow{OC})| = \frac{1}{6} \times 6 = 1$. Distance : $\frac{|0-6|}{\sqrt{36+9+4}} = \frac{6}{7}$.

— **Contrôle** : aire de $ABC = \frac{3\text{vol}}{d} = \frac{3 \times 7}{6} = \frac{7}{2}$, et $\frac{1}{2} \|\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}\| = \frac{1}{2} \|(6, 3, 2)\| = \frac{7}{2}$ ✓

Réponse. $(ABC): 6x + 3y + 2z = 6$; volume 1, distance $\frac{6}{7}$.

Correction de l'exercice 3 - Aire d'un polygone : la formule du lacet

a) $P_1 = O$: aire de $P_1P_2P_3 = \frac{1}{2} \begin{vmatrix} 4 & 5 \\ 0 & 3 \end{vmatrix} = \frac{12}{2} = 6$; aire de $P_1P_3P_4 = \frac{1}{2} \begin{vmatrix} 5 & 1 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} = \frac{17}{2}$. Total $\frac{29}{2}$.

b) Avec $O = P_1$, les termes $i = 1$ et $i = 4$ sont nuls (un vecteur nul) ; restent $\det(\overrightarrow{OP_2}, \overrightarrow{OP_3}) + \det(\overrightarrow{OP_3}, \overrightarrow{OP_4})$, soit exactement a). Pour une origine quelconque, les triangles OP_iP_{i+1} se compensent grâce aux signes (aires orientées).

c)

$$\frac{1}{2} [(0-0) + (12-0) + (20-3) + (0-0)] = \frac{29}{2}$$

d) Chaque déterminant change de signe : on obtient $-\frac{29}{2}$. Le signe indique le **sens de parcours** (positif = sens trigonométrique) ; l'aire est la valeur absolue.

— **Usage** : c'est la formule utilisée par les logiciels de cartographie pour l'aire d'une parcelle à partir des coordonnées de ses sommets.

Réponse. Aire $\frac{29}{2}$; parcours inverse : $-\frac{29}{2}$ (aire orientée).

Correction de l'exercice 4 - Interpolation et Cramer

a) Matrice $V = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 4 \\ 1 & 3 & 9 \end{pmatrix}$ (lignes $(1, x_i, x_i^2)$), second membre $(2, 3, 6)$; Vandermonde :

$$\det V = (2-1)(3-1)(3-2) = 2.$$

b) On remplace successivement chaque colonne par $(2, 3, 6)$:

$$c_0 = \frac{1}{2} \begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 3 & 2 & 4 \\ 6 & 3 & 9 \end{vmatrix} = \frac{6}{2} = 3, \quad c_1 = \frac{1}{2} \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 4 \\ 1 & 6 & 9 \end{vmatrix} = \frac{-4}{2} = -2, \quad c_2 = \frac{1}{2} \begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 6 \end{vmatrix} = 1$$

— Détail de c_2 : $L_2 - L_1 = (0, 1, 1)$, $L_3 - L_1 = (0, 2, 4)$, déterminant $4 - 2 = 2$.

c) $P = X^2 - 2X + 3$: $P(1) = 2$ ✓, $P(2) = 3$ ✓, $P(3) = 6$ ✓ ; $P(4) = 16 - 8 + 3 = 11$.

d) $\frac{6-6+2}{2} = 1$ ✓ (la différence seconde d'un polynôme de degré 2 vaut $2c_2$, cf. plaquette d'applications linéaires).

Réponse. $\det V = 2$; $P = X^2 - 2X + 3$, $P(4) = 11$.

Correction de l'exercice 5 - Racine commune et résultant

a) La seule racine de Q est r : racine commune $\Leftrightarrow P(r) = 0$.

b) Développement selon la première colonne :

$$1 \times (r^2 - 0) - 1 \times (-ar - b) = r^2 + ar + b = P(r)$$

c) Déterminant nul $\Leftrightarrow$ les trois lignes sont liées $\Leftrightarrow \lambda P + \mu XQ + \nu Q = 0$ avec $(\lambda, \mu, \nu) \neq 0$, soit $\lambda P = -(\mu X + \nu)Q$. Si $\lambda \neq 0$, Q divise P : racine commune. (Si $\lambda = 0$, $(\mu X + \nu)Q = 0$ force $\mu = \nu = 0$, exclu.)

— C'est la **matrice de Sylvester** ; son déterminant, le **résultant**, détecte les racines communes sans les calculer.

d) $P(3) = 9 - 15 + 6 = 0$: racine commune 3 ✓ ($P = (X - 2)(X - 3)$).

$P(1) = 1 - 5 + 6 = 2 \neq 0$: pas de racine commune.

Réponse. Le déterminant vaut $P(r)$; racine commune ssi il est nul ; $X - 3$: oui ; $X - 1$: non.

Correction de l'exercice 6 - Identité de Cassini

a) $n = 1$: $\begin{pmatrix} F_2 & F_1 \\ F_1 & F_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ ✓ Hérité :

$$A^{n+1} = A^n A = \begin{pmatrix} F_{n+1} + F_n & F_{n+1} \\ F_n + F_{n-1} & F_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} F_{n+2} & F_{n+1} \\ F_{n+1} & F_n \end{pmatrix} \checkmark$$

b) On prend le déterminant :

$$F_{n+1}F_{n-1} - F_n^2 = \det(A^n) = (\det A)^n = (-1)^n$$

c) $89 \times 34 - 55^2 = 3026 - 3025 = 1 = (-1)^{10}$ ✓

d) Un diviseur commun d de F_n et F_{n+1} divise $F_{n-1} = F_{n+1} - F_n$, donc divise $F_{n+1}F_{n-1} - F_n^2 = \pm 1$: $d = 1$. (Relation de Bézout explicite fournie par un déterminant.)

Réponse. $A^n = \begin{pmatrix} F_{n+1} & F_n \\ F_n & F_{n-1} \end{pmatrix}$; $F_{n+1}F_{n-1} - F_n^2 = (-1)^n$; $89 \times 34 - 55^2 = 1$.

Correction de l'exercice 7 - Tridiagonal trigonométrique (Tchebychev)

a) Formule du tridiagonal avec $a = 2 \cos \theta$, $bc = 1$; $D_2 = 4 \cos^2 \theta - 1$.

b) Si c'est vrai aux rangs $n - 1$ et $n - 2$:

$$2 \cos \theta \sin(n\theta) - \sin((n-1)\theta) = \sin((n+1)\theta)$$

— (identité rappelée avec $a = n\theta$, $b = \theta$). Initialisation : $\frac{\sin 2\theta}{\sin \theta} = 2 \cos \theta = D_1$ ✓, et on pose $D_0 = 1 = \frac{\sin \theta}{\sin \theta}$.

c) $\frac{\sin 3\theta}{\sin \theta} = 3 - 4 \sin^2 \theta = 3 - 4 + 4 \cos^2 \theta = 4 \cos^2 \theta - 1$ ✓

d) $D_n = 0 \Leftrightarrow \sin((n+1)\theta) = 0 \Leftrightarrow \theta = \frac{k\pi}{n+1}$, $k = 1, \dots, n$: exactement n valeurs.

— **Interprétation** : les valeurs $2 \cos \frac{k\pi}{n+1}$ sont les racines du polynôme D_n vu comme polynôme en $x = 2 \cos \theta$ (polynômes de Tchebychev de seconde espèce) ; elles donnent les fréquences propres d'une chaîne de n ressorts.

Réponse. $D_n = \frac{\sin((n+1)\theta)}{\sin \theta}$; non inversible ssi $\theta = \frac{k\pi}{n+1}$, $1 \leq k \leq n$.

Correction de l'exercice 8 - Lemme du déterminant

a) Produit des deux premières : $\begin{pmatrix} I + uv^T & u \\ v^T + v^T uv^T & v^T u + 1 \end{pmatrix}$. Multiplier à droite par la troisième remplace la colonne-bloc 1 par (colonne-bloc 1) - (colonne-bloc 2) v^T : bloc (1, 1) : $I + uv^T - uv^T = I$; bloc (2, 1) : $v^T + (v^T u)v^T - (v^T u + 1)v^T = 0$ ✓

b) Les matrices extérieures sont triangulaires par blocs, de déterminant 1 :

$$\det(I_n + uv^T) \times 1 = \det \begin{pmatrix} I_n & u \\ 0 & 1 + v^T u \end{pmatrix} = 1 + v^T u$$

c) $I_3 + uv^T = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 2 \\ 3 & 3 & 4 \end{pmatrix}$; développement : $2(12 - 6) - 1(8 - 6) + 1(6 - 9) = 12 - 2 - 3 = 7$,
et $1 + (1 + 2 + 3) = 7$ ✓

d) $\lambda I_n + J_n = \lambda \left(I_n + \frac{1}{\lambda} \mathbf{11}^T \right)$ ($\lambda \neq 0$) : $\det = \lambda^n \left(1 + \frac{n}{\lambda} \right) = \lambda^{n-1}(\lambda + n)$, c'est $D_n(\lambda + 1, 1)$ de la plaquette 2 ✓

Réponse. $\det(I + uv^T) = 1 + v^T u$; exemple : 7 ; $\det(\lambda I + J) = \lambda^{n-1}(\lambda + n)$.

Correction de l'exercice 9 - Perturbation de rang 1

a) Colonne j : $C_j + xU$ ($U = (1, 1, 1)$). Par multilinéarité, on développe ; tout terme contenant deux fois xU est nul (deux colonnes égales). Il reste $\det A + x \sum_j \det(C_1, \dots, U, \dots, C_n)$: affine en x .

b) $\det(C_1, \dots, U, \dots)$ (U en colonne j) vaut la somme des cofacteurs de la colonne j . Pour A diagonale, seuls les cofacteurs diagonaux sont non nuls : 6, 3, 2 ($= \frac{\det A}{a_{jj}}$).

$$\det(A + xJ) = 6 + x(6 + 3 + 2) = 6 + 11x$$

c) $x = 1 : \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 4 \end{pmatrix}$, Sarrus : $24 + 1 + 1 - 3 - 4 - 2 = 17 = 6 + 11$ ✓

d) $6 + 11x = 0 \Leftrightarrow x = -\frac{6}{11}$.

— **Lien** : c'est le lemme du déterminant,

$$\det(A + xUU^T) = \det A \left(1 + xU^T A^{-1} U \right) = 6 \left(1 + x \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} \right) \right) = 6 + 11x \quad \checkmark$$

Réponse. $\det(A + xJ) = 6 + 11x$; non inversible pour $x = -\frac{6}{11}$.

Correction de l'exercice 10 - Complément de Schur

a) Produit par blocs : ligne 1 : $A - BD^{-1}C + BD^{-1}C = A$ et $0 + BD^{-1}D = B$; ligne 2 : C et D ✓

b) Les deux facteurs sont triangulaires par blocs :

$$\det M = 1 \times \det(A - BD^{-1}C) \det D$$

c) $A - BD^{-1}C = A - \frac{1}{2}I = \begin{pmatrix} \frac{3}{2} & 1 \\ 1 & \frac{3}{2} \end{pmatrix}$, de déterminant $\frac{9}{4} - 1 = \frac{5}{4}$. Donc $\det M = 4 \times \frac{5}{4} = 5$.

— **Contrôle direct** (calcul exact du déterminant 4×4) : 5 ✓

d) $\det D \det(A - BD^{-1}C) = \det((A - BD^{-1}C)D) = \det(AD - BD^{-1}CD) = \det(AD - BC)$, car

$CD = DC$ donne $D^{-1}CD = C$.

— Sur c) : $AD - BC = 2A - I = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$, déterminant $9 - 4 = 5$ ✓

Réponse. $\det M = \det D \det(A - BD^{-1}C)$; exemple : 5 ; si $CD = DC$: $\det M = \det(AD - BC)$.

Correction de l'exercice 11 - Circulant et racines de l'unité

a) Ligne 1 : $a + b\omega + c\omega^2 = \lambda_\omega$. Ligne 2 : $c + a\omega + b\omega^2 = \omega(a + b\omega + c\omega^{-1})$ et $\omega^{-1} = \omega^2$ (car $\omega^3 = 1$) : $\omega\lambda_\omega$ ✓ Ligne 3 de même : $\omega^2\lambda_\omega$.

b) Les colonnes de V sont ces trois vecteurs ; $\det V \neq 0$ (Vandermonde, $1, j, j^2$ distincts), donc $\det C \det V = \det V \lambda_1 \lambda_j \lambda_{j^2}$ et on simplifie.

c) $\lambda_1 = a + b + c$ et $\lambda_j \lambda_{j^2} = (a + bj + cj^2)(a + bj^2 + cj)$. En développant avec $j^3 = 1$ et $j + j^2 = -1$:

$$\lambda_j \lambda_{j^2} = a^2 + b^2 + c^2 + (ab + bc + ca)(j + j^2) = a^2 + b^2 + c^2 - ab - bc - ca$$

d) $\lambda_1 = 6$, second facteur $1 + 4 + 9 - 2 - 6 - 3 = 3$: $\det C = 18$. Sarrus : $1 + 8 + 27 - 3 \times 6 = 18$ ✓

Réponse. $\det C = \prod_{\omega} (a + b\omega + c\omega^2) = (a + b + c)(a^2 + b^2 + c^2 - ab - bc - ca)$; $(1, 2, 3)$: 18.

Correction de l'exercice 12 - Majoration de Hadamard en dimension 2

a) Développement : membre de gauche $a^2d^2 - 2abcd + b^2c^2 + a^2b^2 + 2abcd + c^2d^2 = a^2(b^2 + d^2) + c^2(b^2 + d^2)$ ✓

b) $(\det A)^2 = \|u\|^2 \|v\|^2 - (u \cdot v)^2 \leq \|u\|^2 \|v\|^2$, égalité $\Leftrightarrow u \cdot v = 0$.

$$|\det A| \leq \|u\| \|v\| \quad (\text{égalité} \Leftrightarrow u \perp v)$$

c) Le parallélogramme construit sur u, v a pour aire $\|u\| \|v\| |\sin \theta|$, au plus l'aire du rectangle de côtés $\|u\|, \|v\|$.

d) $\det = 21 - 4 = 17$; $\|u\| = \|(3, 4)\| = 5$, $\|v\| = \|(1, 7)\| = \sqrt{50}$: $5\sqrt{50} \approx 35,4 \geq 17$ ✓ Et $u \cdot v = 3 + 28 = 31$: $17^2 + 31^2 = 289 + 961 = 1250 = 25 \times 50$ ✓

Réponse. $(\det A)^2 + (u \cdot v)^2 = \|u\|^2 \|v\|^2$; $|\det A| \leq \|u\| \|v\|$; exemple : $17 \leq 5\sqrt{50}$.

Correction de l'exercice 13 - Endomorphisme de crochet : déterminant nul

a) $\delta_A(I_n) = A - A = 0$ (et $\delta_A(A) = 0$) : noyau non nul, donc $\det \delta_A = 0$.

b) $\text{tr}(AM - MA) = \text{tr}(AM) - \text{tr}(MA) = 0$.

c) $\delta_A(E_{ij}) = AE_{ij} - E_{ij}A = (a_i - a_j)E_{ij}$ pour $A = \text{diag}(a_1, a_2)$:

$$\text{Mat}(\delta_A) = \text{diag}(0, -1, 1, 0), \quad \text{rg} \delta_A = 2$$

d) $\ker \delta_A = \text{Vect}(E_{11}, E_{22})$ (matrices diagonales, qui commutent avec A) ; $\text{Im} \delta_A = \text{Vect}(E_{12}, E_{21})$ (matrices à diagonale nulle), bien incluse dans les matrices de trace nulle (dimension 3), sans l'égaliser. Théorème du rang : $2 + 2 = 4$ ✓

Réponse. $\det \delta_A = 0$ ($I_n \in \ker$) ; pour $\text{diag}(1, 2)$: $\text{Mat} = \text{diag}(0, -1, 1, 0)$, rang 2.

Correction de l'exercice 14 - Déterminant de Cauchy d'ordre 2

a) $\det C = \frac{1}{(a_1 + b_1)(a_2 + b_2)} - \frac{1}{(a_1 + b_2)(a_2 + b_1)}$. Au dénominateur commun, le numérateur vaut

$$(a_1 + b_2)(a_2 + b_1) - (a_1 + b_1)(a_2 + b_2) = a_1 b_1 + a_2 b_2 - a_1 b_2 - a_2 b_1 = (a_2 - a_1)(b_2 - b_1)$$

b) $a = (0, 1)$, $b = (1, 2)$: $\frac{1}{1 \times 2} \times \frac{1}{2 \times 3} = \frac{1}{12}$, et directement $\frac{1}{3} - \frac{1}{4} = \frac{1}{12}$ ✓

c) Si et seulement si $a_1 \neq a_2$ et $b_1 \neq b_2$.

d) Lignes $x = 0, 1$ ($a = (0, 1)$), colonnes $b = (1, t)$: inversible $\Leftrightarrow t \neq 1$ (et $t \notin \{0, -1\}$ pour que les valeurs existent).

— **Généralisation** (admise) : $\det \left(\frac{1}{a_i + b_j} \right) = \frac{\prod_{i < j} (a_j - a_i)(b_j - b_i)}{\prod_{i, j} (a_i + b_j)}$; pour Hilbert 3×3 on retrouve $\frac{1}{2160}$ (plaquette 2).

Réponse. $\det C = \frac{(a_2 - a_1)(b_2 - b_1)}{\prod (a_i + b_j)}$; Hilbert : $\frac{1}{12}$; inversible ssi $a_1 \neq a_2$ et $b_1 \neq b_2$.

Correction de l'exercice 15 - Synthèse : volume, orientation et système

a) Développement selon la première ligne de $\begin{pmatrix} 1 & 0 & m \\ m & 1 & 0 \\ 0 & m & 1 \end{pmatrix}$:

$$\Delta(m) = 1(1 - 0) - 0 + m(m^2 - 0) = 1 + m^3 = (1 + m)(1 - m + m^2)$$

— $1 - m + m^2 = \left(m - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4} > 0$: seule racine réelle $m = -1$.

b) Base $\Leftrightarrow m \neq -1$; directe $\Leftrightarrow 1 + m^3 > 0 \Leftrightarrow m > -1$.

c) $m = 1$: volume $|\Delta| = 2$. Système de matrice $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$, second membre $(2, 2, 2)$:

— $\Delta_x = \begin{vmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 2(1) - 0 + 1(2 - 2) = 2$, donc $x = 1$; par symétrie du problème

(permutation circulaire), $y = z = 1$.

— **Vérification** : $u + v + w = (2, 2, 2)$ ✓

d) $m = -1$: $u = (1, -1, 0)$, $v = (0, 1, -1)$, $w = (-1, 0, 1)$. Alors

$$u + v + w = (1 + 0 - 1, -1 + 1 + 0, 0 - 1 + 1) = (0, 0, 0) \quad \checkmark$$

— Les trois vecteurs sont dans le plan $x + y + z = 0$: le parallélépipède est **aplati**, et le système de c) (second membre $(2, 2, 2)$, hors de ce plan) n'aurait **aucune** solution.

Réponse. $\Delta(m) = 1 + m^3$; base ssi $m \neq -1$, directe ssi $m > -1$; $m = 1$: volume 2, $(x, y, z) = (1, 1, 1)$.