

Plaquette 3 - Systèmes, rang et inversibilité avec paramètre

Déterminants — Licence 1 (L1)

Corrections détaillées

Boîte à outils

Système carré $AX = B$:

- $\det A \neq 0$: **une unique solution**, $x_i = \frac{\det A_i}{\det A}$ (Cramer).
- $\det A = 0$: **aucune** ou **une infinité** de solutions ; on décide par le pivot (compatibilité).
 $\det A \neq 0 \Leftrightarrow A \text{ inversible} \Leftrightarrow \ker A = \{0\} \Leftrightarrow \operatorname{rg} A = n$
- **Rang et mineurs** : $\operatorname{rg} A$ est la plus grande taille d'un déterminant extrait non nul.
- **Famille de n vecteurs de K^n** : base $\Leftrightarrow$ déterminant non nul ; **orientation** donnée par le signe (dans $\mathbb{R}^n$).
- **Wronskien** de $f_1, \dots, f_n$: $W = \det(f_j^{i-1})$; s'il est non nul en un point, la famille est libre.
- $\det(A - \lambda I_n)$ est un **polynôme** en λ de degré n : au plus n valeurs critiques.

Correction de l'exercice 1 - Système symétrique à paramètre

a) Chaque ligne somme à $m + 2$: $C_1 \leftarrow C_1 + C_2 + C_3$, puis $L_2 \leftarrow L_2 - L_1$, $L_3 \leftarrow L_3 - L_1$:

$$\Delta = (m+2) \begin{vmatrix} 1 & 1 & m \\ 0 & m-1 & 1-m \\ 0 & 0 & 1-m \end{vmatrix} = -(m+2)(m-1)^2$$

b) Pour $m \notin \{1, -2\}$, solution unique. Le système est invariant par permutation circulaire des inconnues, donc la solution aussi : $x = y = z$, puis $(m+2)x = 1$.

— Solution : $x = y = z = \frac{1}{m+2}$. **Vérification** ($m = 0$) : $x = y = z = \frac{1}{2}$ et $\frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1 \checkmark$

c) $m = 1$: les trois équations sont $x + y + z = 1$: un **plan** de solutions, $\{(1 - y - z, y, z)\}$.

d) $m = -2$: en additionnant les trois équations, $0 = 3$: **aucune solution**.

Réponse. $\Delta = -(m+2)(m-1)^2$; $x = y = z = \frac{1}{m+2}$; $m = 1$: plan ; $m = -2$: impossible.

Correction de l'exercice 2 - Cramer en dimension 3

a) Sarrus sur $\begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 2 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$: $-2 + 6 - 2 - 3 - 8 - 1 = -10$.

b) On remplace successivement chaque colonne par $(1, 5, 10)$:

$$\Delta_x = \begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 5 & -1 & 2 \\ 10 & 2 & 1 \end{vmatrix} = -10, \quad \Delta_y = \begin{vmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 1 & 5 & 2 \\ 3 & 10 & 1 \end{vmatrix} = -20, \quad \Delta_z = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 5 \\ 3 & 2 & 10 \end{vmatrix} = -30$$

— Détail de Δ_x par Sarrus : $-1 + 20 - 10 - 10 - 5 - 4 = -10$.

c) $x = 1, y = 2, z = 3$. **Vérification** : $2 + 2 - 3 = 1 \checkmark$; $1 - 2 + 6 = 5 \checkmark$; $3 + 4 + 3 = 10 \checkmark$

d) Quatre déterminants 3×3 (environ 4×12 multiplications), contre une dizaine

d'opérations pour le pivot. Cramer est surtout un outil **théorique** (formule explicite, dépendance continue en les coefficients).

Réponse. $\Delta = -10$, $(x, y, z) = (1, 2, 3)$.

Correction de l'exercice 3 - Quand trois vecteurs forment-ils une base ?

a) C'est $D_3(1, t)$: lignes de somme $1 + 2t$.

$$\det(u, v, w) = (1 + 2t)(1 - t)^2$$

— **Contrôle** $t = 0$: $\det I_3 = 1 \checkmark$; $t = 2$: $5 \times 1 = 5$, Sarrus : $1 + 8 + 8 - 4 - 4 - 4 = 5 \checkmark$

b) Base si et seulement si $t \neq -\frac{1}{2}$ et $t \neq 1$.

c) $t = -\frac{1}{2}$: $u + v + w = (1 + 2t)(1, 1, 1) = 0$. Relation $u + v + w = 0 \checkmark$

d) $t = 1$: $u = v = w = (1, 1, 1)$, rang 1.

— **Lecture du déterminant** : le facteur $(1 - t)^2$ est **double**, et le rang chute de 2 en $t = 1$; le facteur simple $(1 + 2t)$ correspond à une chute de 1. (Ce lien entre multiplicité et chute du rang n'est pas une règle générale, mais il se produit souvent.)

Réponse. $\det = (1 + 2t)(1 - t)^2$; base ssi $t \notin \{-\frac{1}{2}, 1\}$; $t = -\frac{1}{2}$: $u + v + w = 0$; $t = 1$: rang 1.

Correction de l'exercice 4 - Rang d'une matrice à paramètre

a) Développement selon la première ligne :

$$\det A_m = (m^2 - 2) - 2(2m - 2) + (2 - m) = m^2 - 5m + 4 = (m - 1)(m - 4)$$

b) Déterminant non nul : $\text{rg} A_m = 3$.

c) Le déterminant est nul, donc $\text{rg} \leq 2$.

— $A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$: mineur $\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = -3 \neq 0$: rang 2 (et $C_1 = C_3$).

— $A_4 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 4 & 2 \\ 1 & 1 & 4 \end{pmatrix}$: mineur $\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = -1 \neq 0$ (lignes 1 et 3) : rang 2 (et $L_2 = 2L_1$).

d) $\ker A_4$ (dimension 1) : $x + 2y + z = 0$ et $x + y + 4z = 0$. Par différence $y = 3z$, puis $x = -7z$: $\ker A_4 = \text{Vect}(-7, 3, 1)$. **Vérification** : $-7 + 6 + 1 = 0 \checkmark$; $-7 + 3 + 4 = 0 \checkmark$

Réponse. $\det A_m = (m - 1)(m - 4)$; rang 3 sauf $m \in \{1, 4\}$ où il vaut 2 ; $\ker A_4 = \text{Vect}(-7, 3, 1)$.

Correction de l'exercice 5 - Trois plans et un Vandermonde

a) La matrice $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & a \\ 1 & 4 & a^2 \end{pmatrix}$ est de Vandermonde (colonnes $(1, x, x^2)$ pour $x = 1, 2, a$) :

$$\Delta = (2 - 1)(a - 1)(a - 2) = (a - 1)(a - 2)$$

b) Le second membre $(1, 2, 4)$ est exactement la **deuxième colonne**. Donc $(x, y, z) = (0, 1, 0)$ est solution, et c'est la seule puisque $\Delta \neq 0$. **Vérification** : $1 = 1$, $2 = 2$, $4 = 4 \checkmark$

c) $a = 2$: les colonnes de y et z coïncident ; avec $s = y + z$: $x + s = 1$, $x + 2s = 2$, $x + 4s = 4$, d'où $s = 1$, $x = 0$. Solutions : la **droite** $\{(0, y, 1 - y)\}$.

d) $a = 1$: les colonnes de x et z coïncident ; avec $s = x + z$: $s + y = 1$, $s + 2y = 2$, d'où $y = 1$, $s = 0$ (et $s + 4y = 4$ ✓). Solutions : la droite $\{(x, 1, -x)\}$.

— Dans les deux cas critiques, les trois plans ont une **droite commune** (le système reste compatible car le second membre est une colonne).

Réponse. $\Delta = (a - 1)(a - 2)$; point $(0, 1, 0)$; $a = 2$: droite $(0, y, 1 - y)$; $a = 1$: droite $(x, 1, -x)$.

Correction de l'exercice 6 - Wronskien et liberté de fonctions

a) On factorise e^x , e^{2x} , e^{3x} dans les colonnes :

$$W(x) = e^{6x} \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 4 & 9 \end{vmatrix} = e^{6x} \times (2 - 1)(3 - 1)(3 - 2) = 2e^{6x}$$

b) En dérivant la relation deux fois et en évaluant en un point x : $\sum \lambda_j f_j^{(i)}(x) = 0$ pour $i = 0, 1, 2$, système homogène de matrice de déterminant $W(x) \neq 0$. Seule solution : $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0$.

c) $W = e^{(a_1 + \dots + a_n)x} V(a_1, \dots, a_n)$, non nul car les a_i sont distincts : la famille est **libre**.

d) $\begin{vmatrix} 1 & x & x^2 \\ 0 & 1 & 2x \\ 0 & 0 & 2 \end{vmatrix} = 2$ (triangulaire) : $(1, x, x^2)$ libre.

— **Attention** : la réciproque est fautive en général (un wronskien identiquement nul n'implique pas toujours la liaison, contre-exemple x^2 et $x|x|$).

Réponse. $W = 2e^{6x} \neq 0$: famille libre ; en général $W = e^{(\sum a_i)x} V(a_1, \dots, a_n)$; $W(1, x, x^2) = 2$.

Correction de l'exercice 7 - Matrice compagnon

a) Développement selon la première ligne de $\begin{pmatrix} x & 0 & c \\ -1 & x & b \\ 0 & -1 & x + a \end{pmatrix}$:

$$x(x(x + a) + b) + c((-1)(-1) - 0) = x^3 + ax^2 + bx + c$$

b) $(x - 1)(x - 2)(x - 3) = x^3 - 6x^2 + 11x - 6$: $a = -6$, $b = 11$, $c = -6$:

— $M = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 6 \\ 1 & 0 & -11 \\ 0 & 1 & 6 \end{pmatrix}$.

c) $\text{tr} M = 6 = 1 + 2 + 3$ ✓ ; $\det M$ par développement selon la première ligne : $6 \times (1 \times 1 - 0) = 6 = 1 \times 2 \times 3$ ✓

d) $\det(M - \lambda I) = -\det(\lambda I - M) = -(\lambda - 1)(\lambda - 2)(\lambda - 3)$: non inversible pour $\lambda \in \{1, 2, 3\}$.

— **Portée** : tout polynôme unitaire est le « polynôme caractéristique » d'une matrice ; chercher les racines d'un polynôme revient à chercher les valeurs critiques d'une matrice (c'est ainsi que les logiciels calculent les racines).

Réponse. $\det(xI - C) = x^3 + ax^2 + bx + c$; $M = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 6 \\ 1 & 0 & -11 \\ 0 & 1 & 6 \end{pmatrix}$; critiques 1, 2, 3.

Correction de l'exercice 8 - Valeurs critiques d'une matrice 2×2

a) $AX = \lambda X \Leftrightarrow (A - \lambda I)X = 0$ a une solution non nulle $\Leftrightarrow \det(A - \lambda I) = 0$:

$$(1 - \lambda)^2 - 4 = 0 \Leftrightarrow 1 - \lambda = \pm 2 \Leftrightarrow \lambda \in \{3, -1\}$$

b) $\lambda = 3 : \begin{pmatrix} -2 & 2 \\ 2 & -2 \end{pmatrix} X = 0, X_1 = (1, 1). \lambda = -1 : \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} X = 0, X_2 = (1, -1).$

— **Vérification** : $A(1, 1) = (3, 3) \checkmark ; A(1, -1) = (-1, 1) \checkmark$

c) $\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = -2 \neq 0$: base. Matrice dans cette base : $\text{diag}(3, -1)$.

d) Le déterminant ne dépend pas de la base : $\det A = 3 \times (-1) = -3$ (et directement $1 - 4 = -3 \checkmark$). $\det(A^{10}) = (-3)^{10} = 3^{10} = 59\,049$.

Réponse. $\lambda \in \{3, -1\}$, vecteurs $(1, 1), (1, -1)$; $\det A = -3, \det A^{10} = 3^{10}$.

Correction de l'exercice 9 - Rang d'une matrice rectangulaire par les mineurs

a) $\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} = 3 - 4 = -1 \neq 0$.

b) $L_1 + L_3 = (4, 6, 8, 10) = 2L_2 : L_1 - 2L_2 + L_3 = 0$. Cette relation vaut dans **chaque** matrice 3×3 extraite (on garde les trois lignes) : tous les mineurs 3×3 sont nuls.

c) $\text{rg} B = 2$ (plus grand mineur non nul), et $\dim \ker B = 4 - 2 = 2$.

d) On garde L_1 et $L_2 - 2L_1 = (0, -1, -2, -3)$:

$$\begin{cases} x + 2y + 3z + 4t = 0 \\ y + 2z + 3t = 0 \end{cases} \Rightarrow y = -2z - 3t, \quad x = z + 2t$$

— Base : $(1, -2, 1, 0)$ et $(2, -3, 0, 1)$. **Vérification** sur L_3 : $3 - 8 + 5 = 0 \checkmark$ et $6 - 12 + 6 = 0 \checkmark$

Réponse. $\text{rg} B = 2$; $\ker B = \text{Vect}((1, -2, 1, 0), (2, -3, 0, 1))$.

Correction de l'exercice 10 - Déterminant polynomial et racines évidentes

a) Chaque terme du développement est un produit contenant au plus $x \cdot x^2$: degré ≤ 3 . Pour $x = 1$, toutes les lignes sont égales ; pour $x = -1$, $L_3 = L_1$ ($x^2 = 1$). Racines : 1 et -1.

b) $L_2 \leftarrow L_2 - L_1$ et $L_3 \leftarrow L_3 - L_1$:

$$D(x) = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & x-1 & 0 \\ 0 & 0 & x^2-1 \end{vmatrix} = (x-1)(x^2-1) = (x-1)^2(x+1)$$

c) 1 racine **double**, -1 racine simple. **Contrôle** : $D(0) = 1$, et directement

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 0 + 1 + 1 - 0 - 1 - 0 = 1 \checkmark$$

d) $x = -1$: lignes $(1, 1, 1), (1, -1, 1), (1, 1, 1)$; noyau : $x + y + z = 0$ et $x - y + z = 0$, d'où $y = 0, z = -x$: $\text{Vect}(1, 0, -1)$.

Réponse. $D(x) = (x-1)^2(x+1)$; pour $x = -1$, noyau $\text{Vect}(1, 0, -1)$.

Correction de l'exercice 11 - Matrices entières et inverses entiers

a) $\det A$ et $\det A^{-1}$ sont des **entiers** (sommes de produits d'entiers) et $\det A \cdot \det A^{-1} = \det I_n = 1$. Les seuls entiers inversibles dans $\mathbb{Z}$ sont ± 1 .

b) $A^{-1} = \frac{1}{\det A} \text{com}(A)^T = \pm \text{com}(A)^T$, et la comatrice est entière.

c) $\det \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = 1$: inverse entier $\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$ (vérification : $\begin{pmatrix} 2 & -1 & -2+2 \\ 1 & -1 & -1+2 \end{pmatrix} = I_2$ ✓).

$\det \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = 2$: inverse $\text{diag}(\frac{1}{2}, 1)$, **non entier**.

d) Oui : $A = I_2$, $B = 2I_2$. Non pour la seconde : $\det A \det B = 1$ avec $\det A = 2$ impose $\det B = \frac{1}{2} \notin \mathbb{Z}$.

$$AB = I_n \text{ dans } M_n(\mathbb{Z}) \implies \det A \in \{-1, 1\}$$

Réponse. A^{-1} entière $\Leftrightarrow \det A = \pm 1$; $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$.

Correction de l'exercice 12 - Presque toutes les matrices sont inversibles

a) Dans la formule développée du déterminant, seul le produit des coefficients diagonaux $\prod (a_{ii} - \varepsilon)$ contient ε^n , avec le coefficient $(-1)^n$; les autres termes sont de degré $\leq n-2$.

b) Un polynôme non nul de degré n a au plus n racines : hors de celles-ci, $\det(A - \varepsilon I) \neq 0$.

c) $\det(A - \varepsilon I) = (1 - \varepsilon)(4 - \varepsilon) - 4 = \varepsilon^2 - 5\varepsilon$:

$$A - \varepsilon I_2 \text{ inversible} \Leftrightarrow \varepsilon \notin \{0, 5\}$$

d) Les racines étant en nombre fini, il existe $\varepsilon_k = \frac{1}{k}$ non racine pour tout k assez grand : $A - \frac{1}{k}I_n$ est inversible et tend vers A .

— **Usage** : pour démontrer une identité continue en A (par exemple $\det(\text{com}A) = (\det A)^{n-1}$), il suffit de la prouver pour A **inversible**, puis de passer à la limite.

Réponse. $\det(A - \varepsilon I)$ polynôme de degré n : au plus n valeurs critiques ; exemple : $\varepsilon \notin \{0, 5\}$.

Correction de l'exercice 13 - Orientation d'une base

a) Matrice de colonnes u, v, w :

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & t \end{vmatrix} = 1(t-0) - 1(0-1) + 0 = t+1$$

b) Base si $t \neq -1$; directe si $\det > 0$, soit $t > -1$.

c) Échange : $-(t+1)$ (orientation renversée). Ajouter à une colonne une combinaison des **autres** ne change rien : $t+1$.

d) Volume = $|\det| = |2+1| = 3$.

— **Contrôle** $t = -1$: $w = (0, 1, -1) = v - u$, famille liée ✓

Réponse. $\det = t+1$; base ssi $t \neq -1$, directe ssi $t > -1$; volume 3 pour $t = 2$.

Correction de l'exercice 14 - Système 2×2 à paramètre

a) $\Delta = (m+1)^2 - 1 = m(m+2)$.

b) $\Delta_x = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 2 & m+1 \end{vmatrix} = 2m$ et $\Delta_y = \begin{vmatrix} m+1 & 2 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 2m$:

$$x = y = \frac{2m}{m(m+2)} = \frac{2}{m+2} \quad (m \notin \{0, -2\})$$

— **Vérification** : $(m+1)\frac{2}{m+2} + \frac{2}{m+2} = \frac{2(m+2)}{m+2} = 2 \checkmark$

c) $m = 0$: les deux équations sont $x + y = 2$: infinité de solutions $(x, 2 - x)$. $m = -2$: $-x + y = 2$ et $x - y = 2$; en additionnant, $0 = 4$: aucune solution.

d) Deux droites du plan : **sécantes** (point unique), **confondues** ($m = 0$) ou **parallèles distinctes** ($m = -2$).

Réponse. $\Delta = m(m+2)$; $x = y = \frac{2}{m+2}$; $m = 0$: droite de solutions ; $m = -2$: aucune.

Correction de l'exercice 15 - Synthèse : un système 4×4 symétrique

a) Formule « a sur la diagonale, 1 ailleurs » (plaquette 2) avec $n = 4$:

$$\det A(a) = (a+3)(a-1)^3$$

b) Chaque ligne somme à $a+3$: $A(a)U = (a+3)U$. Donc $X = \frac{1}{a+3}U$ est solution, unique puisque $\det \neq 0$.

— **Vérification** ($a = 0$) : $X = \frac{1}{3}U$, et chaque ligne donne $3 \times \frac{1}{3} = 1 \checkmark$

c) $a = 1$: $A(1) = J_4$, rang 1. Système : $x + y + z + t = 1$, un **hyperplan** affine de solutions (dimension 3).

d) $a = -3$: chaque ligne somme à 0, donc $U \in \ker A(-3)$. Le mineur 3×3 en haut à gauche vaut $D_3(-3, 1) = (-1)(-4)^2 = -16 \neq 0$: rang 3, et $\ker A(-3) = \text{Vect}(U)$.

— Solutions : en sommant les quatre équations, $0 = 4$: **aucune solution** ($U \notin \text{Im} A(-3)$, qui est l'hyperplan $x + y + z + t = 0$: sa somme vaut $4 \neq 0$).

Réponse. $\det = (a+3)(a-1)^3$; $X = \frac{1}{a+3}U$; $a = 1$: hyperplan $x + y + z + t = 1$; $a = -3$: rang 3, aucune solution.