

Plaque 1 - Calcul, propriétés, Cramer et interprétation géométrique

Déterminants — Licence 1 (L1)

Exercices

Méthode

On calcule un déterminant par **Sarrus**, **développement** ou **opérations élémentaires**, on l'utilise pour tester l'inversibilité et résoudre par **Cramer**, et on l'interprète comme **aire** ou **volume** orienté.

Exercice 1 - Déterminants 2x2 et 3x3

Calculer :

a) $\begin{vmatrix} 5 & 3 \\ 2 & 4 \end{vmatrix}$

b) $\begin{vmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 0 & 4 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \end{vmatrix}$

Exercice 2 - Opérations élémentaires

Calculer $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 5 & 7 \\ 3 & 7 & 11 \end{vmatrix}$ en créant des zéros.

Exercice 3 - Déterminant triangulaire

Calculer $\begin{vmatrix} 3 & 5 & -2 & 1 \\ 0 & -1 & 4 & 7 \\ 0 & 0 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 5 \end{vmatrix}$.

Exercice 4 - Inversibilité et paramètre

Pour quelles valeurs de m la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & m \\ m & 4 \end{pmatrix}$ est-elle inversible ?

Exercice 5 - Formules de Cramer

Résoudre par Cramer : $\begin{cases} 2x + y = 5 \\ x - 3y = -1 \end{cases}$

Exercice 6 - Déterminant d'un produit

Soient $A, B \in M_3(\mathbb{R})$ avec $\det A = 4$ et $\det B = -2$. Calculer $\det(AB)$, $\det(A^{-1})$, $\det(3A)$ et $\det(A^T B^2)$.

Exercice 7 - Famille de vecteurs

La famille $((1, 2, 3), (2, 3, 4), (3, 4, 5))$ est-elle une base de $\mathbb{R}^3$?

Exercice 8 - Aire et volume

Calculer l'aire du parallélogramme construit sur $\vec{u}(4, 1)$ et $\vec{v}(2, 3)$, puis le volume du parallélépipède sur $(1, 1, 0)$, $(0, 1, 1)$, $(1, 0, 1)$.

Exercice 9 - Déterminant de Vandermonde

Calculer $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ a^2 & b^2 & c^2 \end{vmatrix}$.

Exercice 10 - Comatrice

Calculer l'inverse de $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 5 & 3 \end{pmatrix}$ via la comatrice, et vérifier.

Exercice 11 - Déterminant par blocs

Calculer $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 \\ 3 & 4 & 0 & 0 \\ 5 & 6 & 2 & 1 \\ 7 & 8 & 3 & 2 \end{vmatrix}$.

Exercice 12 - Déterminant et transposée

Soit A antisymétrique de taille 3 ($A^T = -A$). Montrer que $\det A = 0$.

Exercice 13 - Un déterminant 4×4 par le pivot

Soit $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 3 & 6 & 10 \\ 1 & 4 & 10 & 20 \end{pmatrix}$ (coefficients binomiaux $\binom{i+j}{i}$).

- Calculer $\det P$ en créant des zéros dans la première colonne.
- En déduire que P est inversible et que P^{-1} est à coefficients **entiers**.
- Calculer $\det(2P)$ et $\det(P^3)$.

Exercice 14 - Aire d'un triangle et alignement

Dans un repère orthonormé, on donne $A(1, 2)$, $B(4, 3)$, $C(2, 6)$.

- Calculer l'aire du triangle ABC à l'aide de $\det(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})$.
- Les points $(1, 2)$, $(3, 6)$, $(4, 8)$ sont-ils alignés ?

c) Montrer que la droite (AB) a pour équation $\begin{vmatrix} x & y & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 4 & 3 & 1 \end{vmatrix} = 0$, et la développer.

Exercice 15 - Synthèse : déterminant à paramètre

Soit $D(x) = \begin{vmatrix} x & 1 & 1 \\ 1 & x & 1 \\ 1 & 1 & x \end{vmatrix}$. Calculer $D(x)$ et en déduire pour quels x la matrice est inversible.