

Plaque 4 - Comatrice, endomorphismes et géométrie

Déterminants — Licence 1 (L1)

Exercices

Méthode

Le déterminant n'est pas qu'un nombre attaché à un tableau : c'est un **invariant** de l'endomorphisme (il ne dépend pas de la base), un **facteur de dilatation des volumes**, et il fournit une formule explicite de l'inverse (comatrice). On apprend à calculer le déterminant d'endomorphismes d'espaces de polynômes ou de matrices en choisissant une base où la matrice est triangulaire, et à exploiter $\det(AB) = \det A \det B$ pour obtenir des **impossibilités**.

Exercice 1 - Inverse 3×3 par la comatrice

Soit $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 3 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

- Calculer $\det B$.
- Calculer les neuf cofacteurs et écrire $\text{com}(B)$.
- En déduire B^{-1} .
- Vérifier en calculant la première ligne de BB^{-1} , puis utiliser B^{-1} pour résoudre $BX = (12, 0, 0)$.

Exercice 2 - Déterminant et rang de la comatrice

Soit $A \in M_n(\mathbb{R})$, $n \geq 2$.

- Si A est inversible, montrer que $\det(\text{com}A) = (\det A)^{n-1}$.
- Vérifier sur $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$, pour laquelle $\det A = 4$ et $\text{com}A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ -4 & 2 & 2 \\ 2 & -1 & 1 \end{pmatrix}$.
- Si $\text{rg}A = n - 1$, montrer que $\text{rg}(\text{com}A) = 1$ (on utilisera $A \text{com}(A)^T = 0$). Illustrer avec $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$.
- Si $\text{rg}A \leq n - 2$, que vaut $\text{com}A$?

Exercice 3 - Déterminants d'endomorphismes de polynômes

Sur $\mathbb{R}_n[X]$, calculer le déterminant des endomorphismes suivants en écrivant leur matrice dans la base canonique.

- $T: P \mapsto P(X + 1)$.
- $H: P \mapsto P(2X)$.
- $E: P \mapsto XP' + P$.
- Lesquels sont bijectifs ? Donner $\det(H^{-1} \circ E)$.

Exercice 4 - Le déterminant de la transposition

Soit $\tau: M_n(\mathbb{R}) \rightarrow M_n(\mathbb{R}), M \mapsto M^T$.

- Montrer que $\tau^2 = \text{id}$ et en déduire $\det \tau = \pm 1$.
- Pour $n = 2$, écrire la matrice de τ dans la base $(E_{11}, E_{12}, E_{21}, E_{22})$ et calculer $\det \tau$.
- En utilisant la décomposition en matrices symétriques et antisymétriques, montrer que $\det \tau = (-1)^{n(n-1)/2}$.
- Pour quelles valeurs de $n \leq 6$ a-t-on $\det \tau = 1$?

Exercice 5 - Multiplication à droite

Soit $A \in M_2(\mathbb{R})$ et $R_A: M \mapsto MA$ sur $M_2(\mathbb{R})$.

- Montrer que R_A agit sur chaque **ligne** de M par $\ell \mapsto \ell A$.
- En choisissant la base $(E_{11}, E_{12}, E_{21}, E_{22})$, montrer que la matrice de R_A est $\begin{pmatrix} A^T & 0 \\ 0 & A^T \end{pmatrix}$.
- En déduire $\det R_A = (\det A)^2$.
- Généraliser à $M_n(\mathbb{R})$ et en déduire que R_A est bijective si et seulement si A est inversible.

Exercice 6 - Matrices orthogonales

Une matrice $Q \in M_n(\mathbb{R})$ est orthogonale si $Q^T Q = I_n$.

- Montrer que $\det Q = \pm 1$.
- Calculer le déterminant de la rotation $R_\theta = \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}$ et de la réflexion $S_\theta = \begin{pmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ \sin \theta & -\cos \theta \end{pmatrix}$.
- Vérifier que S_θ est orthogonale et que $S_\theta^2 = I_2$.
- La réciproque de a) est-elle vraie ?

Exercice 7 - Impossibilités par le déterminant

- Montrer qu'il n'existe pas de $A \in M_3(\mathbb{R})$ telle que $A^2 = -I_3$.
- Donner une matrice $A \in M_2(\mathbb{R})$ telle que $A^2 = -I_2$; pourquoi n'y a-t-il pas de contradiction ?
- Montrer que si $N^k = 0$ pour un $k \geq 1$, alors $\det N = 0$, puis que $I_n + N$ est inversible (calculer $(I_n + N)(I_n - N + N^2 - \dots)$).
- Existe-t-il $A, B \in M_3(\mathbb{R})$ telles que $AB = -BA$ avec A, B inversibles ?

Exercice 8 - Aires transformées par une application linéaire

Soit $f(x, y) = (2x + y, x + 3y)$.

- Calculer $\det f$.

- b) Quelle est l'aire de l'image du carré unité ? Décrire cette image.
- c) Quelle est l'aire de l'image du triangle $O(0, 0)$, $A(1, 0)$, $B(0, 2)$?
- d) Application : l'ellipse $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \leq 1$ est l'image du disque unité par $(x, y) \mapsto (ax, by)$; en déduire son aire.

Exercice 9 - Volume d'un tétraèdre

On donne $A(0, 0, 0)$, $B(1, 2, 0)$, $C(0, 1, 3)$, $D(2, 0, 1)$.

- a) Calculer $\det(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD})$.
- b) En déduire le volume du tétraèdre $ABCD$ (on admet la formule $\frac{1}{6}|\det|$).
- c) Justifier le facteur $\frac{1}{6}$ en découpant le cube unité en tétraèdres ou avec le tétraèdre O, e_1, e_2, e_3 .
- d) Le point $E(3, 3, 4)$ est-il dans le plan (BCD) ?

Exercice 10 - Invariants de similitude

Deux matrices A, B sont **semblables** s'il existe P inversible avec $B = P^{-1}AP$.

- a) Montrer que deux matrices semblables ont même déterminant et même trace.
- b) $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$ sont-elles semblables ?
- c) Montrer que I_2 et $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ ont même trace et même déterminant mais ne sont **pas** semblables.
- d) Montrer que $\det(xI_n - A)$ est aussi un invariant de similitude.

Exercice 11 - Aire d'un parallélogramme dans l'espace

Soient $u = (1, 0, 1)$ et $v = (0, 1, 1)$ dans $\mathbb{R}^3$, et M la matrice 3×2 de colonnes u, v .

- a) Calculer la matrice de Gram $G = M^T M$ et $\det G$.
- b) Calculer les trois mineurs 2×2 de M et la somme de leurs carrés.
- c) Comparer avec $\|u \wedge v\|^2$ (produit vectoriel).
- d) En déduire l'aire du parallélogramme construit sur u et v .

Exercice 12 - Dérivée du déterminant en l'identité

- a) Pour $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, développer $\det(I_2 + tA)$ en puissances de t .
- b) Pour $A \in M_3(\mathbb{R})$, montrer que $\det(I_3 + tA) = 1 + t\operatorname{tr}A + O(t^2)$.
- c) En déduire $\frac{d}{dt} \det(I_n + tA)|_{t=0} = \operatorname{tr}A$ (on admet le cas n quelconque).
- d) Application : si $M(t)$ est inversible et dérivable, montrer que $\frac{d}{dt} \det M(t) = \det M(t) \operatorname{tr}(M(t)^{-1} M'(t))$ en écrivant

$$M(t+h) = M(t) \left(I + hM(t)^{-1}M'(t) + o(h) \right).$$

Exercice 13 - Comatrice d'une matrice de rang 1

Soit $J = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ et $A = J + \lambda I_3$.

- Montrer que $\text{com}J = 0$.
- Calculer $\det A$ et, pour $\lambda \notin \{0, -3\}$, trouver A^{-1} sous la forme $\alpha I_3 + \beta J$ (utiliser $J^2 = 3J$).
- Vérifier la formule de la comatrice pour $\lambda = 1$: calculer un cofacteur de A .
- Que vaut $\text{rgcom}A$ pour $\lambda = -3$?

Exercice 14 - Changement de variables linéaire et intégrale double

On veut calculer l'aire du parallélogramme P défini par $0 \leq x + y \leq 2$ et $0 \leq x - 2y \leq 3$.

- On pose $u = x + y$, $v = x - 2y$. Écrire la matrice de $(x, y) \mapsto (u, v)$ et son déterminant.
- En déduire que P est l'image du rectangle $[0, 2] \times [0, 3]$ par une application linéaire dont on donnera le déterminant.
- Calculer l'aire de P .
- Vérifier en calculant les sommets de P et l'aire par un déterminant.

Exercice 15 - Synthèse : l'endomorphisme $P \mapsto P(X) + P(X+1)$

Sur $\mathbb{R}_2[X]$, soit $f(P) = P(X) + P(X+1)$.

- Écrire la matrice A de f dans la base $(1, X, X^2)$; calculer $\det f$ et $\text{tr}f$.
- Calculer $\text{com}(A)$ et en déduire A^{-1} .
- Résoudre $P(X) + P(X+1) = X^2$ et vérifier.
- Montrer que $f = 2 \text{id} + \Delta$ où $\Delta P = P(X+1) - P(X)$, et retrouver $f^{-1} = \frac{1}{2} \left(\text{id} - \frac{\Delta}{2} + \frac{\Delta^2}{4} \right)$.