

Plaquette 2 - Déterminants d'ordre n : techniques et récurrences

Déterminants — Licence 1 (L1)

Exercices

Méthode

Un déterminant de taille n quelconque ne se calcule ni par Sarrus ni en développant « à l'aveugle ». On cherche une **structure** : colonnes qui se somment en une constante, matrice triangulaire après quelques opérations, ligne ou colonne presque nulle qui donne une **relation de récurrence** $D_n = \alpha D_{n-1} + \beta D_{n-2}$. On contrôle toujours la formule obtenue sur $n = 1, 2, 3$ par un calcul direct.

Exercice 1 - Diagonale a, b partout ailleurs

Pour $n \geq 2$, soit $D_n(a, b)$ le déterminant de la matrice de taille n ayant des a sur la diagonale et des b partout ailleurs.

- Montrer que $D_n(a, b) = (a + (n-1)b)(a-b)^{n-1}$.
- Contrôler pour $n = 2$ et pour $n = 3$, $a = 3$, $b = 1$ (Sarrus).
- Pour quelles valeurs de a la matrice $aI_n + J_n - I_n$ (J_n remplie de 1) est-elle inversible ?
- En déduire $\det J_n$ et $\det(J_n - nI_n)$; interpréter.

Exercice 2 - Le tridiagonal 2, -1

Soit D_n le déterminant tridiagonal de taille n avec des 2 sur la diagonale et des -1 sur les deux diagonales voisines.

- Calculer D_1, D_2, D_3 .
- En développant selon la dernière colonne, montrer que $D_n = 2D_{n-1} - D_{n-2}$.
- En déduire $D_n = n + 1$.
- Pourquoi cette matrice est-elle toujours inversible ? (Elle discrétise $-y''$.)

Exercice 3 - Une récurrence à deux racines

Soit Δ_n le déterminant tridiagonal de taille n avec des 5 sur la diagonale, des 2 au-dessus et des 3 au-dessous.

- Établir $\Delta_n = 5\Delta_{n-1} - 6\Delta_{n-2}$ et calculer Δ_1, Δ_2 .
- Résoudre la récurrence.
- Vérifier la formule pour $n = 3$ par un calcul direct.
- Que devient la formule si l'on échange les 2 et les 3 ? Et si on les remplace par 1 et 6 ?

Exercice 4 - Fibonacci et déterminant

Soit F_n le déterminant tridiagonal de taille n avec des 1 sur la diagonale, des 1 au-dessus et des -1 au-dessous.

- Calculer F_1, F_2, F_3 .

- b) Montrer que $F_n = F_{n-1} + F_{n-2}$.
- c) En déduire que F_n est le $(n+1)$ -ième terme de la suite de Fibonacci $1, 1, 2, 3, 5, \dots$; donner F_7 .
- d) Comparer avec le cas où les deux diagonales voisines valent 1 : montrer que la suite est alors périodique de période 6.

Exercice 5 - Vandermonde d'ordre n

Soit $V(x_1, \dots, x_n) = \det(x_j^{i-1})_{1 \leq i, j \leq n}$.

- a) Montrer que $P(X) = V(x_1, \dots, x_{n-1}, X)$ est un polynôme de degré $\leq n-1$ qui s'annule en $x_1, \dots, x_{n-1}$.
- b) Identifier son coefficient dominant et en déduire $V(x_1, \dots, x_n) = V(x_1, \dots, x_{n-1}) \prod_{i=1}^{n-1} (x_n - x_i)$.
- c) Conclure $V = \prod_{i < j} (x_j - x_i)$ et calculer $V(0, 1, 2, 3)$.
- d) Combien de facteurs comporte ce produit ?

Exercice 6 - La matrice des minimums

Soit $M_n = (\min(i, j))_{1 \leq i, j \leq n}$.

- a) Écrire M_4 .
- b) En effectuant $L_n \leftarrow L_n - L_{n-1}$, puis $L_{n-1} \leftarrow L_{n-1} - L_{n-2}$, ..., $L_2 \leftarrow L_2 - L_1$ (dans cet ordre), montrer que $\det M_n = 1$.
- c) Montrer que $M_n = LL^T$ où L est triangulaire inférieure remplie de 1.
- d) Retrouver $\det M_n$ grâce à c).

Exercice 7 - La matrice des distances $|i - j|$

Soit $A_n = (|i - j|)_{1 \leq i, j \leq n}$.

- a) Calculer $\det A_2$ et $\det A_3$.
- b) Pour $n = 4$, effectuer $C_1 \leftarrow C_1 - C_2$, $C_2 \leftarrow C_2 - C_3$, $C_3 \leftarrow C_3 - C_4$ (dans cet ordre) et écrire la matrice obtenue.
- c) Acheter le calcul de $\det A_4$.
- d) La formule générale est $\det A_n = (-1)^{n-1} (n-1) 2^{n-2}$: la vérifier pour $n = 2, 3, 4$.

Exercice 8 - Déterminant circulant d'ordre 3

Soit $C = \begin{pmatrix} a & b & c \\ c & a & b \\ b & c & a \end{pmatrix}$.

- a) Calculer $\det C$ par Sarrus.
- b) Faire apparaître le facteur $a + b + c$ par une opération sur les colonnes.
- c) En déduire la factorisation

$$a^3 + b^3 + c^3 - 3abc = (a + b + c)(a^2 + b^2 + c^2 - ab - bc - ca).$$

d) Montrer que $a^2 + b^2 + c^2 - ab - bc - ca = \frac{1}{2}[(a - b)^2 + (b - c)^2 + (c - a)^2]$ et en déduire quand C (réelle) est inversible.

Exercice 9 - Matrice en flèche

Soit $A = \begin{pmatrix} a_0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & a_1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & a_2 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & a_3 \end{pmatrix}$ avec a_1, a_2, a_3 non nuls.

a) Par $C_1 \leftarrow C_1 - \frac{1}{a_1}C_2 - \frac{1}{a_2}C_3 - \frac{1}{a_3}C_4$, rendre la matrice triangulaire.

b) En déduire $\det A = a_1 a_2 a_3 \left(a_0 - \frac{1}{a_1} - \frac{1}{a_2} - \frac{1}{a_3} \right)$.

c) Application : $a_0 = 4, a_1 = 1, a_2 = 2$ en taille 3 (on supprime la dernière ligne et la dernière colonne) ; vérifier par Sarrus.

d) Pour quelle valeur de a_0 la matrice de taille 4 avec $a_1 = a_2 = a_3 = 1$ est-elle non inversible ?

Exercice 10 - Déterminant par blocs symétriques

Soient $A, B \in M_n(\mathbb{R})$ et $M = \begin{pmatrix} A & B \\ B & A \end{pmatrix}$.

a) Par des opérations par blocs (ajouter les n dernières colonnes aux n premières, puis soustraire les n premières lignes aux n dernières), montrer que $\det M = \det(A + B) \det(A - B)$.

b) Application : $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$; calculer $\det M$.

c) Montrer par un contre-exemple que $\det M \neq (\det A)^2 - (\det B)^2$ en général.

d) Cas $n = 1$: retrouver une identité remarquable.

Exercice 11 - Matrices de rang au plus 2

a) Montrer que la matrice $(i + j)_{1 \leq i, j \leq n}$ a un déterminant nul pour $n \geq 3$.

b) Plus généralement, montrer que $(x_i + y_j)_{i, j}$ est de rang ≤ 2 .

c) Calculer $\det(x_i + y_j)$ pour $n = 2$ et le factoriser.

d) Et $\det(x_i y_j)$ pour $n \geq 2$?

Exercice 12 - Polynôme caractéristique d'un tridiagonal

Soit $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ et $\chi(x) = \det(xI_3 - A)$.

a) Calculer $\chi(x)$ en développant selon la première ligne.

- b) Déterminer les racines de χ .
- c) Pour chaque racine λ , justifier que $A - \lambda I_3$ n'est pas inversible et trouver un vecteur non nul de son noyau pour $\lambda = 2$.
- d) Vérifier que la somme des racines vaut $\text{tr}A$ et leur produit $\det A$.

Exercice 13 - Matrice de Hilbert d'ordre 3

Soit $H = \left(\frac{1}{i+j-1} \right)_{1 \leq i,j \leq 3}$.

- a) Écrire H et calculer $\det H$ (on pourra multiplier par un dénominateur commun).
- b) En déduire que H est inversible et que $\det(H^{-1})$ est un entier.
- c) Expliquer pourquoi un déterminant aussi petit rend la résolution numérique de $HX = B$ délicate.
- d) Montrer que $H_{ij} = \int_0^1 t^{i-1} t^{j-1} dt$.

Exercice 14 - Déterminant d'une matrice de permutation

Pour une permutation σ de $\{1, 2, 3, 4\}$, la matrice P_σ a pour colonne j le vecteur $e_{\sigma(j)}$.

- a) Écrire P_σ pour $\sigma = (1 \rightarrow 2 \rightarrow 3 \rightarrow 1)$, 4 fixe, et calculer son déterminant.
- b) Montrer que $\det P_\sigma = \pm 1$ en comptant les échanges de colonnes qui ramènent P_σ à I_4 .
- c) Calculer le déterminant pour la permutation $1 \rightarrow 2 \rightarrow 3 \rightarrow 4 \rightarrow 1$.
- d) Combien de termes comporte la formule développée d'un déterminant 4×4 ?

Exercice 15 - Synthèse : la matrice des pgcd

Soit $G_n = (\text{pgcd}(i, j))_{1 \leq i, j \leq n}$.

- a) Écrire G_4 et calculer $\det G_4$ par le pivot.
- b) On admet la factorisation $G_n = L \Phi L^\top$, où $L_{ik} = 1$ si $k \mid i$, 0 sinon, et $\Phi = \text{diag}(\varphi(1), \dots, \varphi(n))$ (φ indicatrice d'Euler). Justifier que L est triangulaire à diagonale de 1.
- c) En déduire $\det G_n = \varphi(1)\varphi(2)\cdots\varphi(n)$ et vérifier pour $n = 4$.
- d) Calculer $\det G_6$.