

Plaquette 5 - Problèmes de synthèse sur les déterminants

Déterminants — Licence 1 (L1)

Exercices

Méthode

Ces problèmes montrent le déterminant **au service** d'autres domaines : géométrie (cercles, plans, aires de polygones), polynômes (interpolation, racine commune), suites (identité de Cassini, polynômes de Tchebychev), algèbre linéaire (lemme du déterminant, complément de Schur). À chaque fois, le travail consiste à **reconnaître** un déterminant caché, puis à le calculer avec les techniques des plaquettes précédentes, et à **contrôler** sur un cas simple.

Exercice 1 - Le cercle passant par trois points

Un cercle a une équation de la forme $\alpha(x^2 + y^2) + \beta x + \gamma y + \delta = 0$ avec $\alpha \neq 0$.

a) Montrer que (x, y) est sur le cercle passant par P_1, P_2, P_3 (non alignés) si et

seulement si
$$\begin{vmatrix} x^2 + y^2 & x & y & 1 \\ x_1^2 + y_1^2 & x_1 & y_1 & 1 \\ x_2^2 + y_2^2 & x_2 & y_2 & 1 \\ x_3^2 + y_3^2 & x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix} = 0.$$

b) Application : $P_1(0, 0), P_2(2, 0), P_3(0, 4)$. Calculer les quatre cofacteurs de la première ligne.

c) En déduire l'équation, le centre et le rayon du cercle.

d) Que se passe-t-il si les trois points sont alignés ?

Exercice 2 - Plan passant par trois points

Soient $A(1, 0, 0), B(0, 2, 0), C(0, 0, 3)$.

a) Justifier que $M(x, y, z) \in (ABC) \Leftrightarrow \det(\overrightarrow{AM}, \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) = 0$.

b) Développer ce déterminant et obtenir une équation cartésienne.

c) Vérifier que l'équation s'écrit $\frac{x}{1} + \frac{y}{2} + \frac{z}{3} = 1$; généraliser aux points $(a, 0, 0), (0, b, 0), (0, 0, c)$.

d) Calculer le volume du tétraèdre $OABC$ et la distance de O au plan.

Exercice 3 - Aire d'un polygone : la formule du lacet

Soit le quadrilatère convexe $P_1(0, 0), P_2(4, 0), P_3(5, 3), P_4(1, 4)$.

a) Découper en deux triangles $P_1P_2P_3$ et $P_1P_3P_4$ et calculer leurs aires par déterminants.

b) Montrer que l'aire vaut $\frac{1}{2} \sum_{i=1}^4 \det(\overrightarrow{OP_i}, \overrightarrow{OP_{i+1}})$ (avec $P_5 = P_1$).

c) Calculer cette somme.

d) Que devient la somme si l'on parcourt les sommets dans l'autre sens ?

Exercice 4 - Interpolation et Cramer

On cherche $P = c_0 + c_1X + c_2X^2$ tel que $P(1) = 2$, $P(2) = 3$, $P(3) = 6$.

- Écrire le système en (c_0, c_1, c_2) et calculer son déterminant.
- Calculer c_0, c_1, c_2 par Cramer.
- Vérifier, puis donner $P(4)$.
- Retrouver c_2 par une formule de différences : $c_2 = \frac{P(3) - 2P(2) + P(1)}{2}$.

Exercice 5 - Racine commune et résultant

Soit $P = X^2 + aX + b$ et $Q = X - r$.

- Montrer que P et Q ont une racine commune si et seulement si $P(r) = 0$.
- Calculer $\det \begin{pmatrix} 1 & a & b \\ 1 & -r & 0 \\ 0 & 1 & -r \end{pmatrix}$ et comparer à $P(r)$.
- Expliquer la construction : les lignes représentent P , Q et XQ dans la base $(X^2, X, 1)$; si le déterminant est nul, une combinaison $\lambda P + (\mu X + \nu)Q$ est nulle.
- Application : $X^2 - 5X + 6$ et $X - 3$; puis $X^2 - 5X + 6$ et $X - 1$.

Exercice 6 - Identité de Cassini

Soit (F_n) la suite de Fibonacci ($F_0 = 0$, $F_1 = 1$, $F_{n+2} = F_{n+1} + F_n$) et $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.

- Montrer par récurrence que $A^n = \begin{pmatrix} F_{n+1} & F_n \\ F_n & F_{n-1} \end{pmatrix}$ pour $n \geq 1$.
- En déduire l'identité de Cassini $F_{n+1}F_{n-1} - F_n^2 = (-1)^n$.
- Vérifier pour $n = 10$ ($F_9 = 34$, $F_{10} = 55$, $F_{11} = 89$).
- En déduire que F_n et F_{n+1} sont premiers entre eux.

Exercice 7 - Tridiagonal trigonométrique (Tchebychev)

Soit $\theta \in]0, \pi[$ et D_n le déterminant tridiagonal de taille n avec $2 \cos \theta$ sur la diagonale et 1 sur les deux diagonales voisines.

- Établir $D_n = 2 \cos \theta D_{n-1} - D_{n-2}$, avec $D_1 = 2 \cos \theta$, $D_2 = 4 \cos^2 \theta - 1$.
- Montrer par récurrence que $D_n = \frac{\sin((n+1)\theta)}{\sin \theta}$ (utiliser $\sin(a+b) + \sin(a-b) = 2 \sin a \cos b$).
- Vérifier pour $n = 2$.
- Pour quelles valeurs de θ la matrice est-elle non inversible ? Combien y en a-t-il ?

Exercice 8 - Lemme du déterminant

Soient $u, v \in \mathbb{R}^n$ (colonnes).

- Montrer que $\begin{pmatrix} I_n & 0 \\ v^T & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I_n + uv^T & u \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I_n & 0 \\ -v^T & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I_n & u \\ 0 & 1 + v^T u \end{pmatrix}$.

- b) En déduire $\det(I_n + uv^T) = 1 + v^T u$.
- c) Vérifier avec $u = (1, 2, 3)$, $v = (1, 1, 1)$ par un calcul direct.
- d) En déduire $\det(\lambda I_n + J_n)$ (J_n remplie de 1) et comparer à la plaquette 2.

Exercice 9 - Perturbation de rang 1

Soit $A = \text{diag}(1, 2, 3)$ et J la matrice 3×3 remplie de 1.

- a) Montrer que $x \mapsto \det(A + xJ)$ est une fonction **affine** de x (toutes les colonnes de xJ sont égales).
- b) Calculer $\det(A + xJ)$ à l'aide de $\det A$ et de la somme des cofacteurs de A .
- c) Vérifier pour $x = 1$ par Sarrus.
- d) Pour quelle valeur de x la matrice $A + xJ$ est-elle non inversible ?

Exercice 10 - Complément de Schur

Soit $M = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}$ avec D inversible.

- a) Vérifier que $M = \begin{pmatrix} I & BD^{-1} \\ 0 & I \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A - BD^{-1}C & 0 \\ C & D \end{pmatrix}$.
- b) En déduire $\det M = \det D \det(A - BD^{-1}C)$.
- c) Application : $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$, $B = C = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $D = 2I_2$.
- d) Si de plus C et D commutent, montrer que $\det M = \det(AD - BC)$ et vérifier sur c).

Exercice 11 - Circulant et racines de l'unité

Soit $j = e^{2i\pi/3}$ et $C = \begin{pmatrix} a & b & c \\ c & a & b \\ b & c & a \end{pmatrix}$.

- a) Montrer que le vecteur $(1, \omega, \omega^2)$ vérifie $C(1, \omega, \omega^2)^T = (a + b\omega + c\omega^2)(1, \omega, \omega^2)^T$ pour $\omega \in \{1, j, j^2\}$.
- b) En déduire $CV = V \text{diag}(\lambda_1, \lambda_j, \lambda_{j^2})$ avec V la matrice de Vandermonde de $1, j, j^2$, puis $\det C = \lambda_1 \lambda_j \lambda_{j^2}$.
- c) Retrouver $\det C = (a + b + c)(a^2 + b^2 + c^2 - ab - bc - ca)$.
- d) Vérifier pour $(a, b, c) = (1, 2, 3)$.

Exercice 12 - Majoration de Hadamard en dimension 2

Soient $u = (a, c)$ et $v = (b, d)$ les colonnes de $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$.

- a) Montrer l'identité de Lagrange $(ad - bc)^2 + (ab + cd)^2 = (a^2 + c^2)(b^2 + d^2)$.
- b) En déduire $|\det A| \leq \|u\| \|v\|$, avec égalité si et seulement si $u \perp v$.

- c) Interpréter géométriquement (aire d'un parallélogramme et d'un rectangle).
- d) Application : $\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 4 & 7 \end{pmatrix}$; calculer les deux membres.

Exercice 13 - Endomorphisme de crochet : déterminant nul

Soit $A \in M_n(\mathbb{R})$ et $\delta_A: M \mapsto AM - MA$ sur $M_n(\mathbb{R})$.

- a) Montrer que δ_A n'est jamais injectif, et en déduire $\det \delta_A = 0$.
- b) Montrer que $\text{Im} \delta_A$ est contenue dans l'hyperplan des matrices de trace nulle.
- c) Pour $A = \text{diag}(1, 2)$, écrire la matrice de δ_A dans la base $(E_{11}, E_{12}, E_{21}, E_{22})$, puis son rang.
- d) Décrire $\ker \delta_A$ et $\text{Im} \delta_A$ pour cet exemple.

Exercice 14 - Déterminant de Cauchy d'ordre 2

Soient a_1, a_2, b_1, b_2 avec $a_i + b_j \neq 0$ et $C = \left(\frac{1}{a_i + b_j} \right)_{1 \leq i, j \leq 2}$.

- a) Calculer $\det C$ et montrer que $\det C = \frac{(a_2 - a_1)(b_2 - b_1)}{(a_1 + b_1)(a_1 + b_2)(a_2 + b_1)(a_2 + b_2)}$.
- b) Retrouver le déterminant de la matrice de Hilbert $\begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{3} \end{pmatrix}$.
- c) Quand C est-elle inversible ?
- d) Application : pour quels t les fonctions $x \mapsto \frac{1}{x+1}$ et $x \mapsto \frac{1}{x+t}$ prennent-elles en $x = 0$ et $x = 1$ des valeurs formant une matrice inversible ?

Exercice 15 - Synthèse : volume, orientation et système

Pour $m \in \mathbb{R}$, soient $u = (1, m, 0)$, $v = (0, 1, m)$, $w = (m, 0, 1)$.

- a) Calculer $\Delta(m) = \det(u, v, w)$ et le factoriser sur $\mathbb{R}$.
- b) Pour quelles valeurs de m la famille est-elle une base ? directe ?
- c) Pour $m = 1$, calculer le volume du parallélépipède, puis résoudre $xu + yv + zw = (2, 2, 2)$ par Cramer.
- d) Pour la valeur de m où $\Delta(m) = 0$, donner une relation de dépendance.