

Plaquette 3 - Systèmes, rang et inversibilité avec paramètre

Déterminants — Licence 1 (L1)

Exercices

Méthode

Face à un système ou une matrice qui dépend d'un paramètre, le déterminant fait le **tri** : là où il est non nul, tout va bien (solution unique, matrice inversible, famille libre) ; il ne reste à étudier à la main que les **valeurs critiques** où il s'annule. Pour ces valeurs, on revient au pivot de Gauss pour décrire l'ensemble des solutions (vide ou infini) ou le rang exact.

Exercice 1 - Système symétrique à paramètre

On considère le système (S_m) :
$$\begin{cases} x + y + mz = 1 \\ x + my + z = 1 \\ mx + y + z = 1 \end{cases}$$

- Calculer le déterminant du système et le factoriser.
- Résoudre (S_m) lorsque ce déterminant est non nul (on pourra remarquer une symétrie).
- Résoudre (S_1) .
- Résoudre (S_{-2}) .

Exercice 2 - Cramer en dimension 3

Résoudre par les formules de Cramer :
$$\begin{cases} 2x + y - z = 1 \\ x - y + 2z = 5 \\ 3x + 2y + z = 10 \end{cases}$$

- Calculer le déterminant Δ du système.
- Calculer $\Delta_x, \Delta_y, \Delta_z$.
- En déduire la solution et la vérifier.
- Combien de déterminants 3×3 a-t-il fallu ? Comparer au pivot de Gauss.

Exercice 3 - Quand trois vecteurs forment-ils une base ?

Soit $t \in \mathbb{R}$ et $u = (1, t, t)$, $v = (t, 1, t)$, $w = (t, t, 1)$.

- Calculer $\det(u, v, w)$ et le factoriser (utiliser l'exercice « diagonale a, b ailleurs » de la plaquelette 2 ou le refaire).
- Pour quelles valeurs de t la famille est-elle une base de $\mathbb{R}^3$?
- Pour $t = -\frac{1}{2}$, trouver une relation de dépendance.
- Pour $t = 1$, quel est le rang de la famille ?

Exercice 4 - Rang d'une matrice à paramètre

Soit $A_m = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & m & 2 \\ 1 & 1 & m \end{pmatrix}$.

- Calculer $\det A_m$ et le factoriser.
- En déduire le rang de A_m pour $m \notin \{1, 4\}$.
- Déterminer le rang de A_1 et de A_4 à l'aide d'un mineur 2×2 .
- Donner une base de $\ker A_4$.

Exercice 5 - Trois plans et un Vandermonde

On considère les plans d'équations $x + y + z = 1$, $x + 2y + az = 2$, $x + 4y + a^2z = 4$.

- Calculer le déterminant du système.
- Pour $a \notin \{1, 2\}$, déterminer l'unique point d'intersection sans calcul (comparer le second membre aux colonnes).
- Étudier le cas $a = 2$.
- Étudier le cas $a = 1$.

Exercice 6 - Wronskien et liberté de fonctions

Soient $f_1(x) = e^x$, $f_2(x) = e^{2x}$, $f_3(x) = e^{3x}$.

- Écrire le wronskien $W(x) = \det \begin{pmatrix} f_1 & f_2 & f_3 \\ f_1' & f_2' & f_3' \\ f_1'' & f_2'' & f_3'' \end{pmatrix}$ et le calculer.
- Montrer que si $\lambda_1 f_1 + \lambda_2 f_2 + \lambda_3 f_3 = 0$, alors $(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)$ est solution d'un système de matrice celle de a) ; conclure que la famille est libre.
- Généraliser : $(e^{a_1 x}, \dots, e^{a_n x})$ avec a_i distincts.
- Calculer le wronskien de $(1, x, x^2)$.

Exercice 7 - Matrice compagnon

Soit $C = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -c \\ 1 & 0 & -b \\ 0 & 1 & -a \end{pmatrix}$.

- Calculer $\det(xI_3 - C)$.
- Construire une matrice dont $\det(xI_3 - M)$ vaut $(x - 1)(x - 2)(x - 3)$.
- Vérifier sur cet exemple que $\text{tr} M = 1 + 2 + 3$ et $\det M = 1 \times 2 \times 3$.
- Pour quelles valeurs de λ la matrice $M - \lambda I_3$ est-elle non inversible ?

Exercice 8 - Valeurs critiques d'une matrice 2×2

Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$.

- Déterminer les λ pour lesquels $AX = \lambda X$ a une solution $X \neq 0$.

- b) Pour chacune, donner une solution X .
- c) Montrer que ces deux vecteurs forment une base et écrire la matrice de $X \mapsto AX$ dans cette base.
- d) En déduire $\det A$ et $\det(A^{10})$ sans calcul.

Exercice 9 - Rang d'une matrice rectangulaire par les mineurs

Soit $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}$.

- a) Trouver un mineur 2×2 non nul.
- b) Montrer que tous les mineurs 3×3 sont nuls (on cherchera une relation entre lignes).
- c) En déduire $\operatorname{rg} B$ et $\dim \ker B$.
- d) Donner une base de $\ker B$.

Exercice 10 - Déterminant polynomial et racines évidentes

Soit $D(x) = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & x & 1 \\ 1 & 1 & x^2 \end{vmatrix}$.

- a) Sans calcul, justifier que D est un polynôme de degré ≤ 3 et trouver des racines évidentes.
- b) Calculer $D(x)$ par opérations élémentaires.
- c) Déterminer la multiplicité de chaque racine.
- d) Pour $x = -1$, décrire le noyau de la matrice.

Exercice 11 - Matrices entières et inverses entiers

- a) Soit $A \in M_n(\mathbb{Z})$ inversible avec $A^{-1} \in M_n(\mathbb{Z})$. Montrer que $\det A = \pm 1$.
- b) Réciproquement, si $\det A = \pm 1$, montrer que A^{-1} est entière.
- c) Application : $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.
- d) Existe-t-il $A, B \in M_2(\mathbb{Z})$ telles que $AB = 2I_2$ et $\det A = 1$? Et $AB = I_2$ avec $\det A = 2$?

Exercice 12 - Presque toutes les matrices sont inversibles

Soit $A \in M_n(\mathbb{R})$ quelconque.

- a) Montrer que $\varepsilon \mapsto \det(A - \varepsilon I_n)$ est un polynôme de degré n (coefficient dominant $(-1)^n$).
- b) En déduire que $A - \varepsilon I_n$ est inversible pour tout ε sauf au plus n valeurs.
- c) Application : $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$; pour quels ε la matrice $A - \varepsilon I_2$ est-elle inversible ?

d) En déduire que toute matrice est limite d'une suite de matrices inversibles.

Exercice 13 - Orientation d'une base

Soit $t \in \mathbb{R}$, $u = (1, 0, 1)$, $v = (1, 1, 0)$, $w = (0, 1, t)$.

- a) Calculer $\det(u, v, w)$.
- b) Pour quelles valeurs de t la famille est-elle une base ? une base **directe** ?
- c) Que devient le déterminant si l'on échange u et v ? Si l'on remplace w par $w + 3u - v$?
- d) Calculer le volume du parallélépipède construit sur u, v, w pour $t = 2$.

Exercice 14 - Système 2×2 à paramètre

Soit le système
$$\begin{cases} (m+1)x + y = 2 \\ x + (m+1)y = 2 \end{cases}$$

- a) Calculer son déterminant.
- b) Résoudre par Cramer lorsqu'il est non nul.
- c) Étudier les cas critiques.
- d) Interpréter géométriquement les trois situations.

Exercice 15 - Synthèse : un système 4×4 symétrique

Soit $A(a) = \begin{pmatrix} a & 1 & 1 & 1 \\ 1 & a & 1 & 1 \\ 1 & 1 & a & 1 \\ 1 & 1 & 1 & a \end{pmatrix}$ et le système $A(a)X = U$ avec $U = (1, 1, 1, 1)$.

- a) Calculer $\det A(a)$.
- b) Pour $a \notin \{1, -3\}$, résoudre le système.
- c) Cas $a = 1$: rang de $A(1)$ et solutions.
- d) Cas $a = -3$: rang, noyau de $A(-3)$ et solutions.