

Déterminants

Licence 1 - Fiche de révision

1. Ordre 2

$$\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc.$$

$A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{K})$ est inversible $\iff ad - bc \neq 0$.

2. Ordre 3 - Sarrus

Pour $A = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix}$,

$$\det A = aei + bfg + cdh - ceg - bdi - afh.$$

Uniquement pour les matrices 3×3 .

3. Cofacteurs / Laplace

Mineur M_{ij} : supprimer ligne i , colonne j .

$$C_{ij} = (-1)^{i+j} M_{ij}.$$

Développement suivant la ligne i :

$$\det A = \sum_{j=1}^n a_{ij} C_{ij}.$$

Idem suivant une colonne.

4. Opérations sur les lignes

- $L_i \leftrightarrow L_j$: det change de signe.
- $L_i \leftarrow \lambda L_i$: det est multiplié par λ .
- $L_i \leftarrow L_i + \lambda L_j$: det inchangé.

Même règles sur les colonnes.

5. Triangulaire

Si A est triangulaire :

$$\det A = a_{11} a_{22} \cdots a_{nn}.$$

Très utile après échelonnement.

6. Produit et transposée

$$\det(AB) = \det A \det B$$

$$\det(A^T) = \det A, \quad \det I_n = 1.$$

Si A inversible :

$$\det(A^{-1}) = \frac{1}{\det A}.$$

7. Deux pièges majeurs

En général,

$$\det(A + B) \neq \det A + \det B.$$

Et pour $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$:

$$\det(\lambda A) = \lambda^n \det A.$$

Inversibilité, Cramer et géométrie

8. Critère d'inversibilité Pour $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$:

$$A \text{ inversible} \iff \det A \neq 0.$$

Équivalent à

$$\operatorname{rg}(A) = n.$$

9. Famille de n vecteurs Pour $v_1, \dots, v_n \in \mathbb{K}^n$:

$$\det(v_1, \dots, v_n) \neq 0$$

$\iff$ famille libre $\iff$ base de $\mathbb{K}^n$.

10. Cramer Pour $AX = B$ avec $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ et $\det A \neq 0$:

$$x_j = \frac{\det A_j}{\det A},$$

où A_j remplace la colonne j par B .

À utiliser seulement pour un système carré inversible.

11. Similitude Si

$$A' = P^{-1}AP,$$

alors

$$\det A' = \det A.$$

Le déterminant d'un endomorphisme ne dépend donc pas de la base.

12. Géométrie Dans $\mathbb{R}^2$:

$$|\det(u, v)| = \text{aire du parallélogramme.}$$

Dans $\mathbb{R}^3$:

$$|\det(u, v, w)| = \text{volume du parallélépipède.}$$

Le signe indique l'orientation.

13. Méthode de calcul

- 2×2 : formule directe.
- 3×3 : Sarrus ou Laplace.
- Beaucoup de zéros : Laplace.
- Triangulaire : produit diagonal.
- Grande matrice : Gauss + suivi des opérations.

14. Adjugée Si $C = (C_{ij})$ est la matrice des cofacteurs :

$$\operatorname{adj}(A) = C^T.$$

$$A \operatorname{adj}(A) = (\det A) I_n.$$

Si $\det A \neq 0$:

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A} \operatorname{adj}(A).$$

15. Checklist anti-erreur

- Sarrus seulement en ordre 3.
- Échange de lignes $\Rightarrow$ signe opposé.
- Factoriser une ligne $\Rightarrow$ facteur sort une fois.
- Deux lignes proportionnelles $\Rightarrow \det = 0$.
- $\det A = 0 \Rightarrow$ pas d'inverse, pas de Cramer.

16. Réflexes à connaître

$$\det I_n = 1, \quad \det(A^k) = (\det A)^k.$$

Si $A^m = I_n$:

$$(\det A)^m = 1.$$

Sur $\mathbb{R}$, si m est impair, alors $\det A = 1$.