

Déterminants

Licence 1 (L1) - Cours complet

Calcul, propriétés, inversibilité, Cramer et interprétation géométrique

Idée directrice. À une matrice carrée A d'ordre n , le déterminant associe un scalaire $\det A$. Il détecte si les colonnes sont linéairement indépendantes, donc si A est inversible, et mesure le facteur d'aire ou de volume orienté produit par l'application linéaire associée.

1. Déterminants d'ordre 2 et 3

Définition

Pour

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}, \quad \boxed{\det A = ad - bc.}$$

On note aussi

$$\det A = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}.$$

Exemple

Pour $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$,

$$\det A = 2 \times 4 - (-1) \times 3 = 11.$$

Comme $\det A \neq 0$, la matrice est inversible.

Pour une matrice d'ordre 3,

$$A = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix},$$

la **règle de Sarrus** donne

$$\boxed{\det A = aei + bfg + cdh - ceg - bdi - afh.}$$

Cette règle est spécifique à l'ordre 3 : elle ne se généralise pas telle quelle à l'ordre 4.

Exemple

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ -1 & 3 & 1 \\ 2 & 0 & 4 \end{pmatrix}.$$

Par Sarrus,

$$\det A = 1 \cdot 3 \cdot 4 + 2 \cdot 1 \cdot 2 + 0 - 0 - 2(-1)4 - 1 \cdot 1 \cdot 0 = 24.$$

2. Mineurs, cofacteurs et développement de Laplace

Définition

Soit $A = (a_{ij}) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. On appelle **mineur** M_{ij} le déterminant obtenu en supprimant la ligne i et la colonne j . Le **cofacteur** associé est

$$\boxed{C_{ij} = (-1)^{i+j} M_{ij}.}$$

Les signes suivent le damier

$$\begin{pmatrix} + & - & + & \cdots \\ - & + & - & \cdots \\ + & - & + & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix}.$$

Développement suivant une ligne ou une colonne

Pour toute ligne i ,

$$\det A = \sum_{j=1}^n a_{ij} C_{ij}.$$

Pour toute colonne j ,

$$\det A = \sum_{i=1}^n a_{ij} C_{ij}.$$

Choisir le bon développement

Développer de préférence suivant une ligne ou une colonne contenant beaucoup de zéros. Avant de développer, on peut créer des zéros par des opérations du type $L_i \leftarrow L_i + \lambda L_j$, qui ne changent pas le déterminant.

Exemple

Pour

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & 5 \\ 0 & -1 & 4 \end{pmatrix},$$

on développe suivant la première colonne :

$$\det A = 1 \begin{vmatrix} 3 & 5 \\ -1 & 4 \end{vmatrix} = 12 + 5 = 17.$$

3. Propriétés fondamentales

Le déterminant est alterné et multilinéaire par rapport aux lignes (ou aux colonnes). En pratique, cela donne des règles de calcul très efficaces.

Effet des opérations élémentaires

Soit A une matrice carrée.

- Échanger deux lignes : le déterminant est multiplié par -1 .
- Multiplier une ligne par λ : le déterminant est multiplié par λ .
- Remplacer L_i par $L_i + \lambda L_j$ avec $i \neq j$: le déterminant est inchangé.

Les mêmes règles valent pour les colonnes.

Conséquences immédiates :

- si deux lignes sont égales ou proportionnelles, alors $\det A = 0$;
- si une ligne est nulle, alors $\det A = 0$;
- pour $\lambda \in \mathbb{K}$ et $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$,

$$\det(\lambda A) = \lambda^n \det A.$$

Piège classique

Le facteur λ^n vient du fait que *toutes* les n lignes sont multipliées par λ . Ainsi, en ordre 3, $\det(2A) = 8 \det A$, pas $2 \det A$.

Matrices triangulaires

Théorème

Si A est triangulaire supérieure ou inférieure, alors

$$\det A = \prod_{i=1}^n a_{ii}.$$

En particulier, pour une matrice diagonale $D = \text{diag}(d_1, \dots, d_n)$,

$$\det D = d_1 \cdots d_n.$$

Exemple

$$T = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 5 \\ 0 & -3 & 4 \\ 0 & 0 & 7 \end{pmatrix} \implies \det T = 2(-3)7 = -42.$$

4. Transposée, produit et inverse

Théorème

Pour $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$,

$$\det(A^T) = \det A,$$

$$\det(AB) = \det A \det B.$$

De plus,

$$\det I_n = 1.$$

Critère d'inversibilité

Pour $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$,

$$A \text{ inversible} \iff \det A \neq 0.$$

Si A est inversible,

$$\det(A^{-1}) = \frac{1}{\det A}.$$

Preuve du sens utile. Si A est inversible, alors

$$1 = \det I_n = \det(AA^{-1}) = \det A \det(A^{-1}),$$

donc $\det A \neq 0$. Réciproquement, $\det A \neq 0$ implique que les colonnes sont libres, donc que A est de rang n et inversible.

Piège classique

En général,

$$\det(A + B) \neq \det A + \det B.$$

Le déterminant est linéaire par rapport à *une ligne à la fois*, les autres étant fixées, mais il n'est pas linéaire comme fonction de la matrice entière.

5. Calcul d'un déterminant par échelonnement

Le pivot de Gauss est souvent la méthode la plus rapide pour les grandes matrices : on transforme A en matrice triangulaire en tenant compte de l'effet de chaque opération sur le déterminant.

Algorithme de calcul par Gauss

1. Échelonner la matrice.
2. À chaque échange de lignes, changer le signe du déterminant.
3. Si une ligne est multipliée par λ , enregistrer ce facteur.
4. Les opérations $L_i \leftarrow L_i + \lambda L_j$ ne changent rien.
5. Une fois la matrice triangulaire, multiplier les termes diagonaux puis corriger les facteurs accumulés.

Exemple

Soit

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 5 & 3 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

On effectue

$$L_2 \leftarrow L_2 - 2L_1, \quad L_3 \leftarrow L_3 - L_1,$$

d'où

$$\det A = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & 1 \end{vmatrix}.$$

Puis $L_3 \leftarrow L_3 + 2L_2$:

$$\det A = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \end{vmatrix} = 3.$$

6. Déterminant et familles de vecteurs

Soient $v_1, \dots, v_n \in \mathbb{K}^n$ et $A = (v_1 \cdots v_n)$ la matrice ayant ces vecteurs pour colonnes.

Théorème

Les propriétés suivantes sont équivalentes :

$$\boxed{\det(v_1, \dots, v_n) \neq 0}$$

$$\iff (v_1, \dots, v_n) \text{ est libre}$$

$$\iff (v_1, \dots, v_n) \text{ est une base de } \mathbb{K}^n.$$

Si E est un espace vectoriel de dimension n , une famille de n vecteurs est donc une base dès que son déterminant dans une base fixée est non nul.

Exemple

Dans $\mathbb{R}^3$, considérons

$$v_1 = (1, 0, 1), \quad v_2 = (1, 1, 0), \quad v_3 = (0, 2, 1).$$

Alors

$$\det(v_1, v_2, v_3) = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 3 \neq 0.$$

Donc (v_1, v_2, v_3) est une base de $\mathbb{R}^3$.

7. Déterminant d'un endomorphisme et changement de base

Si $u : E \rightarrow E$ est un endomorphisme d'un espace vectoriel de dimension finie et A sa matrice dans une base $\mathcal{B}$, on définit

$$\det(u) = \det A.$$

Cette valeur ne dépend pas de la base choisie.

En effet, dans une autre base, la matrice est semblable :

$$A' = P^{-1}AP.$$

Donc

$$\det A' = \det(P^{-1}) \det A \det P = \det A.$$

Théorème

Pour un endomorphisme $u : E \rightarrow E$ en dimension finie,

$$u \text{ est un automorphisme} \iff \det(u) \neq 0.$$

8. Systèmes linéaires et formules de Cramer

Considérons un système carré

$$AX = B, \quad A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}).$$

Si $\det A \neq 0$, le système possède une unique solution.

Formules de Cramer

Si $\det A \neq 0$, alors la solution $X = (x_1, \dots, x_n)^\top$ vérifie

$$x_j = \frac{\det A_j}{\det A},$$

où A_j est obtenue en remplaçant la colonne j de A par B .

Exemple

Réolvons

$$\begin{cases} 2x + y = 5, \\ x - y = 1. \end{cases}$$

On a

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}, \quad \det A = -3.$$

Alors

$$\det A_1 = \begin{vmatrix} 5 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = -6, \quad \det A_2 = \begin{vmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = -3.$$

Donc

$$x = 2, \quad y = 1.$$

Piège classique

Cramer ne s'applique que lorsque le système est carré et $\det A \neq 0$. Pour résoudre un système général, le pivot de Gauss reste la méthode de référence.

9. Interprétation géométrique

Dans $\mathbb{R}^2$, si $u, v \in \mathbb{R}^2$, alors

$$|\det(u, v)|$$

est l'aire du parallélogramme engendré par u et v . Le signe indique l'orientation de la base (u, v) .

Dans $\mathbb{R}^3$, pour $u, v, w \in \mathbb{R}^3$,

$$|\det(u, v, w)|$$

est le volume du parallélépipède engendré par ces trois vecteurs.

Plus généralement, l'application linéaire $x \mapsto Ax$ multiplie les volumes orientés par $\det A$ et les volumes usuels par $|\det A|$.

Exemple

Pour

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix},$$

l'axe horizontal est dilaté d'un facteur 2 et l'axe vertical d'un facteur 3 : les aires sont multipliées par

$$\det A = 6.$$

Si $\det A < 0$, il y a en plus renversement de l'orientation.

10. Formule de l'adjugée

La matrice des cofacteurs est $C = (C_{ij})$. Son transposé est l'**adjointe classique** ou **adjugée** :

$$\text{adj}(A) = C^T.$$

On a

$$A \text{adj}(A) = \text{adj}(A)A = (\det A)I_n.$$

Ainsi, si $\det A \neq 0$,

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A} \text{adj}(A).$$

Cette formule est surtout théorique ou pratique pour de petites matrices ; en calcul numérique ou pour de grandes dimensions, le pivot de Gauss est préférable.

11. Méthodes et pièges à maîtriser

Choisir la méthode de calcul

- Ordre 2 : formule directe $ad - bc$.
- Ordre 3 : Sarrus ou Laplace, selon la structure.
- Beaucoup de zéros : développement de Laplace.
- Matrice triangulaire : produit diagonal.
- Grande matrice dense : échelonnement par opérations sur les lignes.

Erreurs fréquentes

- $\det(A + B)$ n'est pas $\det A + \det B$ en général.
- $\det(\lambda A) = \lambda^n \det A$, pas $\lambda \det A$.
- Un échange de deux lignes change le signe.
- Multiplier une ligne par λ multiplie le déterminant par λ .
- $L_i \leftarrow L_i + \lambda L_j$ ne change pas le déterminant.
- La règle de Sarrus est réservée aux matrices 3×3 .

12. Exercices corrigés essentiels

Exercice 1 - Paramètre et inversibilité

Soit

$$A_m = \begin{pmatrix} m & 1 \\ 2 & m \end{pmatrix}.$$

Déterminer les valeurs de $m \in \mathbb{R}$ pour lesquelles A_m est inversible.

Correction.

$$\det A_m = m^2 - 2.$$

Donc

$$A_m \text{ inversible} \iff m \neq \pm\sqrt{2}.$$

Exercice 2 - Déterminant avec opérations élémentaires

Calculer

$$D = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 4 & 9 \end{vmatrix}.$$

On effectue $L_2 \leftarrow L_2 - L_1$, $L_3 \leftarrow L_3 - L_1$:

$$D = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 3 & 8 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 8 \end{vmatrix} = 2.$$

Exercice 3 - Aire et orientation

Soient $u = (2, 1)$ et $v = (1, 3)$. Alors

$$\det(u, v) = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = 5.$$

Le parallélogramme a une aire 5, et la base (u, v) a la même orientation que la base canonique puisque le déterminant est positif.

À retenir. Le déterminant est l'outil qui relie calcul matriciel et géométrie :

$$\det A \neq 0 \iff A \text{ inversible} \iff \text{rg}(A) = n.$$

Pour calculer vite, exploiter la structure de la matrice avant de développer.