

Plaquette 2 - Calculer des développements limités

Développements limités — Licence 1 (L1)

Corrections détaillées

Boîte à outils

DL usuels en 0.

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + o(x^3) \quad \ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + o(x^3)$$

$$\sin x = x - \frac{x^3}{6} + o(x^4) \quad \cos x = 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} + o(x^5)$$

- $(1+x)^\alpha = 1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2}x^2 + \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)}{6}x^3 + o(x^3)$;
 $\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + \dots + x^n + o(x^n)$.
- Une fonction paire (resp. impaire) n'a que des puissances paires (resp. impaires) dans son DL en 0.
- Primitivation : si $f' = a_0 + a_1x + \dots + o(x^n)$, alors $f = f(0) + a_0x + \frac{a_1}{2}x^2 + \dots + o(x^{n+1})$.

Correction de l'exercice 1 - La tangente à l'ordre 5

$\tan$ est impaire : son DL ne contient que x, x^3, x^5 . On écrit $\frac{1}{\cos x} = \frac{1}{1-u}$ avec $u = \frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{24} + o(x^5)$:

$$\frac{1}{\cos x} = 1 + u + u^2 + o(x^5) = 1 + \frac{x^2}{2} + \frac{5x^4}{24} + o(x^5)$$

- (car $u^2 = \frac{x^4}{4} + o(x^5)$ et $-\frac{1}{24} + \frac{1}{4} = \frac{5}{24}$).
- On multiplie par $\sin x = x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120} + o(x^6)$ et on garde les degrés ≤ 5 :
- $\tan x = x + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{6}\right)x^3 + \left(\frac{5}{24} - \frac{1}{12} + \frac{1}{120}\right)x^5 + o(x^5) = x + \frac{x^3}{3} + \frac{2x^5}{15} + o(x^5)$.

Réponse. $\tan x = x + \frac{x^3}{3} + \frac{2x^5}{15} + o(x^5)$.

Correction de l'exercice 2 - Une composée avec l'exponentielle

On pose $u = \sin x = x - \frac{x^3}{6} + o(x^3)$, qui tend vers 0. Puis $e^u = 1 + u + \frac{u^2}{2} + \frac{u^3}{6} + o(u^3)$, avec

$$u^2 = x^2 + o(x^3) \quad u^3 = x^3 + o(x^3)$$

- On additionne en gardant les termes de degré ≤ 3 :
 $e^{\sin x} = 1 + \left(x - \frac{x^3}{6}\right) + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + o(x^3)$.
- $e^{\sin x} = 1 + x + \frac{x^2}{2} + o(x^3)$: le terme en x^3 est nul.
- Il ne faut pas s'arrêter à $u \approx x$: le $-\frac{x^3}{6}$ de $\sin$ compense exactement le $\frac{u^3}{6}$.

Réponse. $1 + x + \frac{x^2}{2} + o(x^3)$.

Correction de l'exercice 3 - La racine carrée

Formule de $(1+x)^\alpha$ avec $\alpha = \frac{1}{2}$: $\frac{\alpha(\alpha-1)}{2} = -\frac{1}{8}$ et $\frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)}{6} = \frac{1}{16}$.

$$\sqrt{1+x} = 1 + \frac{x}{2} - \frac{x^2}{8} + \frac{x^3}{16} + o(x^3)$$

- Pour $x = 0,02$: $1 + 0,01 - 0,000\,05 + 0,000\,000\,5 = 1,009\,950\,5$.
- Valeur exacte : $\sqrt{1,02} \approx 1,009\,950\,494$: l'erreur est de l'ordre de 10^{-9} .

Réponse. $1 + \frac{x}{2} - \frac{x^2}{8} + \frac{x^3}{16}$; $\sqrt{1,02} \approx 1,00995$.

Correction de l'exercice 4 - Logarithme du cosinus

$\cos x = 1 + u$ avec $u = -\frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} + o(x^4) \rightarrow 0$. Puis $\ln(1+u) = u - \frac{u^2}{2} + o(u^2)$, et $u^2 = \frac{x^4}{4} + o(x^4)$:

$$\ln(\cos x) = -\frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} - \frac{x^4}{8} + o(x^4) = -\frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{12} + o(x^4)$$

- On n'a pas besoin de u^3 , qui est en x^6 .
- Contrôle de parité : $\ln \circ \cos$ est paire, son DL n'a que des puissances paires.
- Autre méthode : $\ln(\cos x)$ a pour dérivée $-\tan x$; en primitivant $-x - \frac{x^3}{3}$, on retrouve $-\frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{12}$.

Réponse. $-\frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{12} + o(x^4)$.

Correction de l'exercice 5 - Un produit tronqué

On multiplie les deux DL à l'ordre 3 en ne gardant que les termes de degré ≤ 3 :

$$\left(1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6}\right)\left(1 - \frac{x^2}{2}\right) + o(x^3)$$

- Degré 0 : 1. Degré 1 : x . Degré 2 : $\frac{x^2}{2} - \frac{x^2}{2} = 0$. Degré 3 : $\frac{x^3}{6} - \frac{x^3}{2} = -\frac{x^3}{3}$.
- $e^x \cos x = 1 + x - \frac{x^3}{3} + o(x^3)$.
- Vérification avec les complexes : $e^x \cos x = \operatorname{Re}(e^{(1+i)x})$, et le terme de degré 3 est $\operatorname{Re} \frac{(1+i)^3}{6} = \frac{-2}{6}$.

Réponse. $1 + x - \frac{x^3}{3} + o(x^3)$.

Correction de l'exercice 6 - L'arcsinus par intégration

$\arcsin'(x) = (1-x^2)^{-1/2}$. Avec $\alpha = -\frac{1}{2}$ et $u = -x^2$:

$$(1-x^2)^{-1/2} = 1 + \frac{x^2}{2} + o(x^2)$$

- On primitive, avec $\arcsin 0 = 0$: $\arcsin x = x + \frac{x^3}{6} + o(x^3)$.
- Comparaison : $\sin x = x - \frac{x^3}{6}$ et $\arcsin x = x + \frac{x^3}{6}$; les courbes réciproques sont symétriques par rapport à $y = x$, d'où les signes opposés.

Réponse. $\arcsin x = x + \frac{x^3}{6} + o(x^3)$.

Correction de l'exercice 7 - Un DL en 1

On pose $x = 1 + h$ avec $h \rightarrow 0$:

$$\ln x = \ln(1+h) = (x-1) - \frac{(x-1)^2}{2} + \frac{(x-1)^3}{3} + o((x-1)^3)$$

— Pour $\frac{1}{x}$ en 2 : $x = 2+h$, et $\frac{1}{2+h} = \frac{1}{2} \times \frac{1}{1+\frac{h}{2}} = \frac{1}{2} \left(1 - \frac{h}{2} + \frac{h^2}{4} \right) + o(h^2)$.

— Donc $\frac{1}{x} = \frac{1}{2} - \frac{x-2}{4} + \frac{(x-2)^2}{8} + o((x-2)^2)$.

— On laisse le résultat en puissances de $x-a$: développer ces puissances en x n'a pas de sens.

Réponse. $\ln x = (x-1) - \frac{(x-1)^2}{2} + \frac{(x-1)^3}{3}$; $\frac{1}{x} = \frac{1}{2} - \frac{x-2}{4} + \frac{(x-2)^2}{8}$.

Correction de l'exercice 8 - Le sinus hyperbolique

$\operatorname{sh} x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$: dans la différence, les termes de degré pair s'annulent, les impairs se doublent.

$$\operatorname{sh} x = x + \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120} + o(x^5) \quad \operatorname{ch} x = 1 + \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} + o(x^4)$$

— Ce sont les DL de sin et cos **sans les signes moins** : sh et ch sont les parties impaire et paire de e^x .

Réponse. $\operatorname{sh} x = x + \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120}$; $\operatorname{ch} x = 1 + \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24}$.

Correction de l'exercice 9 - Un quotient classique

$e^x - 1 = x \left(1 + \frac{x}{2} + \frac{x^2}{6} + o(x^2) \right)$, donc

$$\frac{x}{e^x - 1} = \frac{1}{1+u} \quad \text{avec} \quad u = \frac{x}{2} + \frac{x^2}{6} + o(x^2)$$

— $\frac{1}{1+u} = 1 - u + u^2 + o(u^2)$ et $u^2 = \frac{x^2}{4} + o(x^2)$:

— $\frac{x}{e^x - 1} = 1 - \frac{x}{2} + \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{6} \right) x^2 + o(x^2) = 1 - \frac{x}{2} + \frac{x^2}{12} + o(x^2)$.

— Les coefficients $1, -\frac{1}{2}, \frac{1}{12}$ sont liés aux nombres de Bernoulli.

Réponse. $1 - \frac{x}{2} + \frac{x^2}{12} + o(x^2)$.

Correction de l'exercice 10 - L'inverse du cosinus

$\cos x = 1 - u$ avec $u = \frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{24} + o(x^4)$:

$$\frac{1}{\cos x} = 1 + u + u^2 + o(u^2) = 1 + \frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{24} + \frac{x^4}{4} + o(x^4)$$

— $\frac{1}{\cos x} = 1 + \frac{x^2}{2} + \frac{5x^4}{24} + o(x^4)$.

— Seules des puissances paires apparaissent : cohérent avec la parité de $\frac{1}{\cos}$.

— Ce DL est un intermédiaire du calcul de tan (premier exercice).

Réponse. $1 + \frac{x^2}{2} + \frac{5x^4}{24} + o(x^4)$.

Correction de l'exercice 11 - Une puissance variable

On passe à l'exponentielle : $(1+x)^{1/x} = \exp\left(\frac{\ln(1+x)}{x}\right)$, avec

$$\frac{\ln(1+x)}{x} = 1 - \frac{x}{2} + \frac{x^2}{3} + o(x^2)$$

- Donc $(1+x)^{1/x} = e \times e^v$ avec $v = -\frac{x}{2} + \frac{x^2}{3} + o(x^2) \rightarrow 0$.
- $e^v = 1 + v + \frac{v^2}{2} + o(v^2) = 1 - \frac{x}{2} + \frac{x^2}{3} + \frac{x^2}{8} + o(x^2)$.
- $(1+x)^{1/x} = e \left(1 - \frac{x}{2} + \frac{11x^2}{24} \right) + o(x^2)$. Attention à bien sortir le facteur e :
 $\exp(1+v) \neq 1 + (1+v) + \dots$

Réponse. $e(1 - \frac{x}{2} + \frac{11}{24}x^2) + o(x^2)$.

Correction de l'exercice 12 - Parité et coefficients

- $x \sin x$, $\ln(1+x^2)$ et e^{x^2} sont paires : seuls les degrés pairs apparaissent.
- $\frac{\sin x}{1+x^2}$ est impaire : seuls les degrés impairs apparaissent.
- Pour e^{x^2} , on remplace u par x^2 dans $e^u = 1 + u + \frac{u^2}{2} + \frac{u^3}{6} + o(u^3)$:

$$e^{x^2} = 1 + x^2 + \frac{x^4}{2} + \frac{x^6}{6} + o(x^6)$$

- La parité divise le travail par deux et sert de contrôle.

Réponse. Pairs / impaire ; $e^{x^2} = 1 + x^2 + \frac{x^4}{2} + \frac{x^6}{6} + o(x^6)$.

Correction de l'exercice 13 - L'erreur de troncature

Le produit $(x + o(x)) \times (\dots)$ n'est connu qu'à $o(x)$ près : le DL de $\sin$ à l'ordre 1 limite le résultat à l'ordre 1. Il faut développer chaque facteur à l'ordre 3 (ici, $\sin x$ commence en x , l'ordre 3 suffit pour les deux).

$$\left(x - \frac{x^3}{6}\right) \left(1 + x + \frac{x^2}{2}\right) + o(x^3) = x + x^2 + \frac{x^3}{2} - \frac{x^3}{6} + o(x^3)$$

- $\sin x e^x = x + x^2 + \frac{x^3}{3} + o(x^3)$.
- Règle : l'ordre d'un produit est limité par l'ordre le plus faible, corrigé par la valuation de l'autre facteur.

Réponse. $x + x^2 + \frac{x^3}{3} + o(x^3)$.

Correction de l'exercice 14 - Vrai ou faux ?

- Vrai** : un DL à l'ordre 1 en 0 équivaut à la dérivabilité en 0 (avec $f(0) = 1$).
- Faux** en général : si f est deux fois dérivable, la formule de Taylor donne $f'(0) = 2 \times 3 = 6$, pas 3 ; et un DL à l'ordre 2 n'implique même pas l'existence de $f'(0)$.

$$f(x) = f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2}x^2 + o(x^2)$$

- Vrai** : une somme de deux quantités négligeables devant x^2 l'est encore.
- Vrai** : $\frac{x o(x^2)}{x^3} = \frac{o(x^2)}{x^2} \rightarrow 0$.

Réponse. a) vrai · b) faux ($f'(0) = 6$) · c) vrai · d) vrai.

Correction de l'exercice 15 - Synthèse : une différence de deux DL

- $\sqrt{1+x} = 1 + \frac{x}{2} - \frac{x^2}{8} + \frac{x^3}{16} + o(x^3)$ et $e^{x/2} = 1 + \frac{x}{2} + \frac{x^2}{8} + \frac{x^3}{48} + o(x^3)$.

$$f(x) = -\frac{x^2}{4} + \left(\frac{1}{16} - \frac{1}{48}\right)x^3 + o(x^3) = -\frac{x^2}{4} + \frac{x^3}{24} + o(x^3)$$

b) Le premier terme non nul donne l'équivalent : $f(x) \sim -\frac{x^2}{4}$, donc $\frac{f(x)}{x^2} \rightarrow -\frac{1}{4}$.

c) Au voisinage de 0, f a le signe de $-\frac{x^2}{4}$: $f(x) \leq 0$. Les courbes de $\sqrt{1+x}$ et $e^{x/2}$ ont la même tangente en 0, et la première passe sous la seconde.

Réponse. a) $-\frac{x^2}{4} + \frac{x^3}{24}$ · b) $f \sim -\frac{x^2}{4}$, limite $-\frac{1}{4}$ · c) $f \leq 0$ près de 0.