

Plaquette 3 - Limites et équivalents par développements limités

Développements limités — Licence 1 (L1)

Corrections détaillées

Boîte à outils

Équivalents et limites.

- Si $f(x) = a_p x^p + o(x^p)$ avec $a_p \neq 0$, alors $f(x) \sim a_p x^p$ au voisinage de 0.
- Équivalents usuels en 0 : $\sin x \sim x$, $\ln(1+x) \sim x$, $e^x - 1 \sim x$, $1 - \cos x \sim \frac{x^2}{2}$, $\tan x \sim x$.
- Les équivalents se multiplient et se divisent ; on peut les élever à une puissance fixe. On ne les additionne pas, et on ne les compose pas par exp.
- Premiers termes utiles :

$$\sin x - x \sim -\frac{x^3}{6} \quad \tan x - x \sim \frac{x^3}{3} \quad e^x - 1 - x \sim \frac{x^2}{2}$$
- En $+\infty$: poser $t = \frac{1}{x}$, puis développer en $t \rightarrow 0^+$.

Correction de l'exercice 1 - Deux limites de référence

Les dénominateurs sont en x^3 et x^2 : on développe les numérateurs à ces ordres.

$$\sin x - x = -\frac{x^3}{6} + o(x^3) \quad e^x - 1 - x = \frac{x^2}{2} + o(x^2)$$

- Donc $\frac{\sin x - x}{x^3} = -\frac{1}{6} + o(1) \rightarrow -\frac{1}{6}$ et $\frac{e^x - 1 - x}{x^2} \rightarrow \frac{1}{2}$.
- Piège : écrire $\sin x \sim x$ donne « $\sin x - x \sim x - x = 0$ », ce qui n'a pas de sens. On ne soustrait pas des équivalents.

Réponse. $-\frac{1}{6}$; $\frac{1}{2}$.

Correction de l'exercice 2 - Une différence d'inverses

On réduit au même dénominateur : $\frac{x^2 - \sin^2 x}{x^2 \sin^2 x}$. Le dénominateur est équivalent à x^4 ; on développe le numérateur à l'ordre 4 :

$$\sin^2 x = \left(x - \frac{x^3}{6}\right)^2 + o(x^4) = x^2 - \frac{x^4}{3} + o(x^4)$$

- Donc $x^2 - \sin^2 x = \frac{x^4}{3} + o(x^4) \sim \frac{x^4}{3}$, et le quotient est équivalent à $\frac{x^4/3}{x^4} = \frac{1}{3}$.
- La limite vaut $\frac{1}{3}$ (forme $\infty - \infty$ levée).

Réponse. $\frac{1}{3}$.

Correction de l'exercice 3 - Cosinus puissance $1/x^2$

Forme 1^∞ : on écrit $(\cos x)^{1/x^2} = \exp\left(\frac{\ln \cos x}{x^2}\right)$. Or

$$\ln(\cos x) = -\frac{x^2}{2} + o(x^2) \quad \text{donc} \quad \frac{\ln \cos x}{x^2} \rightarrow -\frac{1}{2}$$

— Par continuité de l'exponentielle, la limite vaut $e^{-1/2} = \frac{1}{\sqrt{e}} \approx 0,607$.

— Contrôle numérique : $x = 0,001$ donne 0,606 531.

Réponse. $e^{-1/2}$.

Correction de l'exercice 4 - Tangente moins sinus

Avec $\tan x = x + \frac{x^3}{3} + o(x^3)$ et $\sin x = x - \frac{x^3}{6} + o(x^3)$:

$$\tan x - \sin x = \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{6}\right)x^3 + o(x^3) = \frac{x^3}{2} + o(x^3)$$

— Donc $\tan x - \sin x \sim \frac{x^3}{2}$ et la limite vaut $\frac{1}{2}$.

— Autre méthode (sans DL de tan) : $\tan x - \sin x = \tan x(1 - \cos x) \sim x \times \frac{x^2}{2}$; ici le **produit** d'équivalents est licite.

Réponse. $\frac{x^3}{2}$; limite $\frac{1}{2}$.

Correction de l'exercice 5 - Une limite en l'infini

On pose $t = \frac{1}{x} \rightarrow 0^+$: l'expression devient $\frac{e^t - 1 - t}{t^2}$.

$$e^t - 1 - t = \frac{t^2}{2} + o(t^2)$$

— La limite vaut $\frac{1}{2}$.

— Méthode générale en $\pm\infty$: on se ramène en 0 avec $t = \frac{1}{x}$, où les DL usuels s'appliquent.

Réponse. $\frac{1}{2}$.

Correction de l'exercice 6 - Une racine en l'infini

Pour $x > 0$: $\sqrt{x^2 + x} = x\sqrt{1 + t}$ avec $t = \frac{1}{x}$. Or $\sqrt{1 + t} = 1 + \frac{t}{2} - \frac{t^2}{8} + o(t^2)$:

$$\sqrt{x^2 + x} - x = x\left(\frac{1}{2x} - \frac{1}{8x^2} + o\left(\frac{1}{x^2}\right)\right) = \frac{1}{2} - \frac{1}{8x} + o\left(\frac{1}{x}\right)$$

— La limite vaut $\frac{1}{2}$, et l'expression s'en approche par valeurs inférieures, avec un écart de l'ordre de $\frac{1}{8x}$.

— La quantité conjuguée donnait la limite, mais pas le terme suivant.

Réponse. $\frac{1}{2} - \frac{1}{8x} + o\left(\frac{1}{x}\right)$; limite $\frac{1}{2}$.

Correction de l'exercice 7 - Une puissance délicate

On passe à l'exponentielle : l'expression vaut $\exp\left(x^2 \ln\left(1 + \frac{1}{x}\right) - x\right)$. Avec

$\ln(1 + t) = t - \frac{t^2}{2} + \frac{t^3}{3} + o(t^3)$ et $t = \frac{1}{x}$:

$$x^2 \ln\left(1 + \frac{1}{x}\right) - x = x - \frac{1}{2} + \frac{1}{3x} + o\left(\frac{1}{x}\right) - x = -\frac{1}{2} + o(1)$$

— La limite vaut $e^{-1/2}$.

- Il fallait développer $\ln$ à l'ordre 2 au moins : l'ordre 1 donnait $x - x = 0$ et masquait le $-\frac{1}{2}$.

Réponse. $e^{-1/2}$.

Correction de l'exercice 8 - Deux équivalents

- $\sin x - x \cos x = x - \frac{x^3}{6} - x\left(1 - \frac{x^2}{2}\right) + o(x^3) = \frac{x^3}{3} + o(x^3)$:

$$\sin x - x \cos x \sim \frac{x^3}{3}$$

- $a^x - b^x = e^{x \ln a} - e^{x \ln b} = (1 + x \ln a) - (1 + x \ln b) + o(x) = x \ln \frac{a}{b} + o(x)$.

- Comme $\ln \frac{a}{b} \neq 0$: $a^x - b^x \sim x \ln \frac{a}{b}$.

Réponse. $\frac{x^3}{3}$; $x \ln \frac{a}{b}$.

Correction de l'exercice 9 - Somme de deux développements

On développe chaque terme à l'ordre 2 :

$$e^x - \cos x - x = \left(1 + x + \frac{x^2}{2}\right) - \left(1 - \frac{x^2}{2}\right) - x + o(x^2) = x^2 + o(x^2)$$

- La limite vaut 1.
— Les termes constants et de degré 1 s'annulent : il fallait aller jusqu'à l'ordre 2 pour voir le premier terme non nul.

Réponse. 1.

Correction de l'exercice 10 - Un quotient d'écart

Numérateur et dénominateur commencent tous deux en x^3 :

$$\arctan x - x \sim -\frac{x^3}{3} \quad \sin x - x \sim -\frac{x^3}{6}$$

- Le quotient d'équivalents est licite : la limite vaut $\frac{-1/3}{-1/6} = 2$.
— Contrôle numérique : pour $x = 0,001$, on obtient 1,999 999.

Réponse. 2.

Correction de l'exercice 11 - Équivalent d'une suite

Avec $t = \frac{1}{n} \rightarrow 0$: $e^t - 1 = t + \frac{t^2}{2} + o(t^2)$, donc

$$n(e^{1/n} - 1) = 1 + \frac{1}{2n} + o\left(\frac{1}{n}\right)$$

- Ainsi $u_n = \frac{1}{2n} + o\left(\frac{1}{n}\right)$, soit $u_n \sim \frac{1}{2n}$.
— On retrouve que $u_n \rightarrow 0$, mais on sait maintenant **à quelle vitesse** : comme $\frac{1}{2n}$, et par valeurs positives.

Réponse. $u_n \sim \frac{1}{2n}$.

Correction de l'exercice 12 - Pourquoi on n'additionne pas les équivalents

« $f \sim 0$ » voudrait dire $\frac{f}{0} \rightarrow 1$, ce qui n'a pas de sens (sauf pour la fonction nulle). La soustraction a détruit toute l'information : les termes en x s'annulent.

— On développe à l'ordre 2 : $\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + o(x^2)$ et $\sin x = x + o(x^2)$.

$$\ln(1+x) - \sin x = -\frac{x^2}{2} + o(x^2) \sim -\frac{x^2}{2}$$

— Règle : pour une somme ou une différence, on revient aux développements limités.

Réponse. Les équivalents ne s'additionnent pas ; $\ln(1+x) - \sin x \sim -\frac{x^2}{2}$.

Correction de l'exercice 13 - Une limite avec racines

— $\sqrt{1+x} = 1 + \frac{x}{2} - \frac{x^2}{8} + o(x^2)$: la première limite vaut $-\frac{1}{8}$.

— $(1+x)^{1/3} = 1 + \frac{x}{3} + o(x)$:

$$\frac{\sqrt[3]{1+x} - 1}{x} = \frac{1}{3} + o(1) \xrightarrow{x \rightarrow 0} \frac{1}{3}$$

— Plus généralement, $(1+x)^\alpha - 1 \sim \alpha x$: c'est la dérivée de $t \mapsto t^\alpha$ en 1.

Réponse. $-\frac{1}{8}$; $\frac{1}{3}$.

Correction de l'exercice 14 - Vrai ou faux ?

a) **Faux** en général : $f(x) = \frac{1}{x} + 1$ et $g(x) = \frac{1}{x}$ vérifient $\frac{f}{g} = 1 + x \rightarrow 1$, mais $\frac{e^f}{e^g} = e^x \rightarrow 1$. Il faut $f - g \rightarrow 0$ pour conclure.

b) **Vrai** : $f = g \times \frac{f}{g}$ et $\frac{f}{g} \rightarrow 1$.

c) **Vrai** : $\frac{x+x^2}{x} = 1+x \rightarrow 1$.

d) **Vrai** : les équivalents se multiplient :

$$\frac{f^2}{g^2} = \left(\frac{f}{g}\right)^2 \rightarrow 1$$

Réponse. a) faux · b) vrai · c) vrai · d) vrai.

Correction de l'exercice 15 - Synthèse : l'écart à e

a) $(1+x)^{1/x} - e = -\frac{e}{2}x + o(x)$, donc

$$\frac{(1+x)^{1/x} - e}{x} \xrightarrow{x \rightarrow 0} -\frac{e}{2} \approx -1,359$$

— b) Avec $x = \frac{1}{n}$: $\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n - e \sim -\frac{e}{2n}$.

— La suite $\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$ tend vers e par valeurs inférieures, lentement : pour $n = 100$, l'écart vaut environ 0,0135 (on trouve 2,7048 contre 2,7183).

Réponse. a) $-\frac{e}{2}$ · b) $-\frac{e}{2n}$.