

## Plaquette 4 - Position, asymptotes et extremums par développements limités

### Développements limités — Licence 1 (L1)

Corrections détaillées

#### Boîte à outils

##### Lecture d'un DL.

$$f(x) = a_0 + a_1(x - a) + a_p(x - a)^p + o((x - a)^p), \quad a_p \neq 0$$

- Tangente en  $a$  :  $y = a_0 + a_1(x - a)$  ;  $f(x) - \text{tangente} \sim a_p(x - a)^p$ .
- $p$  pair : courbe au-dessus de la tangente si  $a_p > 0$ , au-dessous si  $a_p < 0$ .  $p$  impair : la courbe traverse sa tangente.
- Si  $a_1 = 0$  : minimum local si  $p$  pair et  $a_p > 0$ , maximum si  $p$  pair et  $a_p < 0$ , pas d'extremum si  $p$  impair.
- En  $+\infty$  : si  $f(x) = ax + b + \frac{c}{x} + o\left(\frac{1}{x}\right)$  avec  $c \neq 0$ , la droite  $y = ax + b$  est asymptote, la courbe au-dessus si  $\frac{c}{x} > 0$ .

#### Correction de l'exercice 1 - Sous la tangente

On développe à l'ordre 2 :

$$f(x) = 1 + x + \frac{x^2}{2} - x^2 + o(x^2) = 1 + x - \frac{x^2}{2} + o(x^2)$$

- Tangente en 0 :  $y = 1 + x$ .
- $f(x) - (1 + x) \sim -\frac{x^2}{2} < 0$  pour  $x \neq 0$  : la courbe est **au-dessous** de sa tangente près de 0.
- Contraste :  $e^x$  seule est au-dessus de sa tangente ; le terme  $-x^2$  a changé la concavité.

**Réponse.** Tangente  $y = 1 + x$  ; courbe au-dessous.

#### Correction de l'exercice 2 - Traverser sa tangente

- $\sin x = x - \frac{x^3}{6} + o(x^3)$  : tangente  $y = x$ , et  $\sin x - x \sim -\frac{x^3}{6}$ , du signe de  $-x$ . La courbe est sous sa tangente pour  $x > 0$ , au-dessus pour  $x < 0$  : elle la **traverse** (point d'inflexion).
- $g(x) = \frac{x^3}{3} + o(x^3)$  (les termes en  $x$  et  $x^2$  se compensent) :

$$g(x) \sim \frac{x^3}{3}$$

- Tangente en 0 :  $y = 0$  ;  $g$  change de signe en 0, la courbe traverse aussi sa tangente. Un premier terme de degré impair signale toujours une traversée.

**Réponse.** Deux traversées (termes en  $x^3$ ).

#### Correction de l'exercice 3 - Une asymptote oblique

Avec  $t = \frac{1}{x} \rightarrow 0$  :  $e^t = 1 + t + \frac{t^2}{2} + o(t^2)$ , donc

$$f(x) = x \left( 1 + \frac{1}{x} + \frac{1}{2x^2} + o\left(\frac{1}{x^2}\right) \right) = x + 1 + \frac{1}{2x} + o\left(\frac{1}{x}\right)$$

- La droite  $y = x + 1$  est asymptote en  $+\infty$  et en  $-\infty$ .
- $f(x) - (x + 1) \sim \frac{1}{2x}$  : la courbe est au-dessus de l'asymptote en  $+\infty$ , au-dessous en  $-\infty$ .

**Réponse.** Asymptote  $y = x + 1$  ; au-dessus en  $+\infty$ , au-dessous en  $-\infty$ .

### Correction de l'exercice 4 - Une racine cubique

Pour  $x > 0$  :  $f(x) = x(1 + u)^{1/3}$  avec  $u = \frac{2}{x} \rightarrow 0$ . Or  $(1 + u)^{1/3} = 1 + \frac{u}{3} - \frac{u^2}{9} + o(u^2)$  :

$$f(x) = x \left( 1 + \frac{2}{3x} - \frac{4}{9x^2} \right) + o\left(\frac{1}{x}\right) = x + \frac{2}{3} - \frac{4}{9x} + o\left(\frac{1}{x}\right)$$

- Asymptote :  $y = x + \frac{2}{3}$ .
- $f(x) - \left(x + \frac{2}{3}\right) \sim -\frac{4}{9x} < 0$  : la courbe est au-dessous de l'asymptote en  $+\infty$ .

**Réponse.**  $y = x + \frac{2}{3}$  ; courbe au-dessous.

### Correction de l'exercice 5 - Un minimum invisible à la dérivée seconde

$f(x) = -\sin x + x$  et  $f'(x) = -\cos x + 1$  :  $f(0) = f'(0) = 0$ . Le test de la dérivée seconde ne conclut pas.

- Le DL à l'ordre 4 tranche :

$$f(x) = 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} + \frac{x^2}{2} + o(x^4) = 1 + \frac{x^4}{24} + o(x^4)$$

- $f(x) - f(0) \sim \frac{x^4}{24} > 0$  pour  $x \neq 0$  : 0 est un **minimum local** (et même global, car  $f = x - \sin x \geq 0$  pour  $x \geq 0$ , et  $f$  est paire).

**Réponse.**  $f(0) = f'(0) = 0$  ; minimum local ( $\frac{x^4}{24}$ ).

### Correction de l'exercice 6 - Un maximum en 0

On développe :  $x \sin x = x^2 - \frac{x^4}{6} + o(x^4)$ , donc

$$g(x) = -\frac{x^4}{6} + o(x^4)$$

- $g(0) = 0$  et  $g(x) \sim -\frac{x^4}{6} < 0$  pour  $x \neq 0$  proche de 0 : 0 est un **maximum local**.
- Le premier terme non nul est de degré 4 (pair) et de coefficient négatif.
- (Globalement :  $g(x) = x(\sin x - x) \leq 0$  car  $\sin x - x$  a le signe de  $-x$ .)

**Réponse.** Maximum local ( $-\frac{x^4}{6}$ ).

### Correction de l'exercice 7 - Point critique : extremum ou non ?

- $h(x) = \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} - x^3 + o(x^3) = \frac{x^2}{2} + o(x^2)$  :  $h'(0) = 0$  et  $h(x) - h(0) \sim \frac{x^2}{2} > 0$  : **minimum local**. Le terme en  $x^3$  n'intervient pas.
- $k(x) = \frac{x^3}{6} + o(x^3)$  :

$$k(x) - k(0) \sim \frac{x^3}{6}$$

- qui change de signe : **pas d'extremum** en 0, bien que  $k'(0) = 0$  (point d'inflexion à tangente horizontale).

**Réponse.**  $h$  : minimum ;  $k$  : pas d'extremum.

## Correction de l'exercice 8 - Position en un point quelconque

On pose  $x = 1 + h$  :  $\ln(1 + h) = h - \frac{h^2}{2} + o(h^2)$ , soit

$$\ln x = (x - 1) - \frac{(x - 1)^2}{2} + o((x - 1)^2)$$

- Tangente en 1 :  $y = x - 1$ .
- $\ln x - (x - 1) \sim -\frac{(x - 1)^2}{2} < 0$  : la courbe est au-dessous de sa tangente près de 1 (et même partout, par concavité).

**Réponse.** Tangente  $y = x - 1$  ; courbe au-dessous.

## Correction de l'exercice 9 - Deux asymptotes différentes

On écrit  $f(x) = |x|\sqrt{1+u}$  avec  $u = \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2} \rightarrow 0$ , et  $\sqrt{1+u} = 1 + \frac{u}{2} - \frac{u^2}{8} + o(u^2)$  :

$$\sqrt{1+u} = 1 + \frac{1}{2x} + \frac{3}{8x^2} + o\left(\frac{1}{x^2}\right)$$

- En  $+\infty$  ( $|x| = x$ ) :  $f(x) = x + \frac{1}{2} + \frac{3}{8x} + o\left(\frac{1}{x}\right)$  : asymptote  $y = x + \frac{1}{2}$ , courbe au-dessus.
- En  $-\infty$  ( $|x| = -x$ ) :  $f(x) = -x - \frac{1}{2} - \frac{3}{8x} + o\left(\frac{1}{x}\right)$  : asymptote  $y = -x - \frac{1}{2}$ , et  $-\frac{3}{8x} > 0$  : courbe au-dessus.
- Il ne faut pas oublier  $\sqrt{x^2} = |x|$  : c'est lui qui donne deux asymptotes différentes.

**Réponse.**  $y = x + \frac{1}{2}$  en  $+\infty$ ,  $y = -x - \frac{1}{2}$  en  $-\infty$  ; courbe au-dessus.

## Correction de l'exercice 10 - Deux courbes tangentes

On développe les deux à l'ordre 2 :

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2} + o(x^2) \quad 1 + \ln(1 + x) = 1 + x - \frac{x^2}{2} + o(x^2)$$

- Même tangente  $y = 1 + x$  : les courbes sont tangentes en  $(0 ; 1)$ .
- Différence :  $e^x - 1 - \ln(1 + x) = x^2 + o(x^2) \sim x^2 > 0$  : la courbe de l'exponentielle est au-dessus de l'autre près de 0.

**Réponse.** Tangente commune  $y = 1 + x$  ;  $e^x$  au-dessus.

## Correction de l'exercice 11 - Un DL qui donne la dérivée

Par la formule de Taylor-Young, les coefficients du DL sont  $\frac{f^{(k)}(0)}{k!}$  :

$$f(0) = 2 \quad f'(0) = -3 \quad \frac{f''(0)}{2} = 0 \quad \frac{f'''(0)}{6} = 5$$

- Donc  $f''(0) = 0$  et  $f'''(0) = 30$ .
- Tangente :  $y = 2 - 3x$  ;  $f(x) - (2 - 3x) \sim 5x^3$  change de signe : la courbe traverse sa tangente (point d'inflexion).

**Réponse.** 2, -3, 0, 30 ; inflexion en 0.

## Correction de l'exercice 12 - Une asymptote horizontale

Avec  $t = \frac{1}{x} \rightarrow 0^+$  :  $1 - \cos t = \frac{t^2}{2} - \frac{t^4}{24} + o(t^4)$ , donc

$$f(x) = \frac{1 - \cos t}{t^2} = \frac{1}{2} - \frac{t^2}{24} + o(t^2) = \frac{1}{2} - \frac{1}{24x^2} + o\left(\frac{1}{x^2}\right)$$

- Asymptote horizontale  $y = \frac{1}{2}$  en  $+\infty$ .
- $f(x) - \frac{1}{2} \sim -\frac{1}{24x^2} < 0$  : la courbe est au-dessous de l'asymptote.

**Réponse.**  $y = \frac{1}{2}$  ; courbe au-dessous.

### Correction de l'exercice 13 - Trouver un paramètre

On développe  $\frac{1+ax}{1+bx} = (1+ax)(1-bx+b^2x^2) + o(x^2) = 1 + (a-b)x + b(b-a)x^2 + o(x^2)$ .

- Avec  $e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2} + o(x^2)$ , il faut identifier les coefficients :

$$a - b = 1 \quad b(b - a) = \frac{1}{2}$$

- La première donne  $b - a = -1$ , puis  $-b = \frac{1}{2}$  :  $b = -\frac{1}{2}$  et  $a = \frac{1}{2}$ .
- L'approximation  $e^x \approx \frac{1+x/2}{1-x/2} = \frac{2+x}{2-x}$  (approximant de Padé) est ainsi exacte jusqu'à l'ordre 2 ; par exemple, pour  $x = 0,1$ , elle donne 1,105 26 contre 1,105 17.

**Réponse.**  $a = \frac{1}{2}$ ,  $b = -\frac{1}{2}$ .

### Correction de l'exercice 14 - Vrai ou faux ?

- Faux** :  $f(x) - 1 \sim x^3$  change de signe en 0.
- Vrai** :  $f(x) - f(0) \sim -2x^4 < 0$  au voisinage de 0 (hors 0).
- Faux** :  $x^4$  vérifie  $f(0) = f'(0) = 0$  et a un minimum en 0 ; il faut aller plus loin dans le DL.
- Vrai** :  $f(x) = \frac{\sin x}{x}$  a pour asymptote  $y = 0$  en  $+\infty$  et s'annule en tous les  $k\pi$ .

$$\frac{\sin(k\pi)}{k\pi} = 0$$

**Réponse.** a) faux · b) vrai · c) faux · d) vrai.

### Correction de l'exercice 15 - Synthèse : étude asymptotique complète

- Avec  $e^{1/x} = 1 + \frac{1}{x} + \frac{1}{2x^2} + o\left(\frac{1}{x^2}\right)$  :

$$(x+1)\left(1 + \frac{1}{x} + \frac{1}{2x^2}\right) = x+1 + \frac{1}{2x} + 1 + \frac{1}{x} + o\left(\frac{1}{x}\right) = x+2 + \frac{3}{2x} + o\left(\frac{1}{x}\right)$$

- Asymptote  $y = x + 2$  aux deux infinis ;  $f(x) - (x+2) \sim \frac{3}{2x}$  : au-dessus en  $+\infty$ , au-dessous en  $-\infty$ .
- En  $0^+$ ,  $\frac{1}{x} \rightarrow +\infty$  et  $e^{1/x} \rightarrow +\infty$  :  $f \rightarrow +\infty$ . En  $0^-$ ,  $e^{1/x} \rightarrow 0$  et  $f \rightarrow 0$ .

**Réponse.** b)  $y = x + 2$ , au-dessus en  $+\infty$ , au-dessous en  $-\infty$  · c) 0 en  $0^-$ ,  $+\infty$  en  $0^+$ .