

Plaquette 5 - Formule de Taylor et approximations numériques

Développements limités — Licence 1 (L1)

Corrections détaillées

Boîte à outils

Formules de Taylor (f de classe C^{n+1} sur un intervalle contenant a et x).

$$f(x) = \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(a)}{k!} (x-a)^k + R_n(x)$$

- Taylor-Young : $R_n(x) = o((x-a)^n)$ (information locale).
- Inégalité de Taylor-Lagrange : si $|f^{(n+1)}| \leq M$ entre a et x ,

$$|R_n(x)| \leq \frac{M|x-a|^{n+1}}{(n+1)!}$$

- Pour une somme alternée dont les termes décroissent en valeur absolue vers 0, l'erreur est majorée par le premier terme négligé.
- Les coefficients d'un DL en 0 donnent les dérivées : $f^{(k)}(0) = k! \times a_k$.

Correction de l'exercice 1 - Approcher e

Toutes les dérivées de $\exp$ valent $\exp$, positive et majorée par $e < 3$ sur $[0; 1]$. Le reste en $x = 1$ est donc positif (Taylor-Lagrange avec reste $\frac{e^c}{(n+1)!}$, $c \in]0; 1[$) et

$$0 \leq e - \sum_{k=0}^n \frac{1}{k!} \leq \frac{3}{(n+1)!}$$

- On veut $\frac{3}{(n+1)!} < 10^{-4}$: $7! = 5\,040$ ne suffit pas, $8! = 40\,320$ donne $\frac{3}{40\,320} \approx 7,4 \times 10^{-5}$. Donc $n = 7$.
- $\sum_{k=0}^7 \frac{1}{k!} \approx 2,718\,254$, et $e \approx 2,718\,282$: l'erreur réelle, $2,8 \times 10^{-5}$, est bien sous la borne.

Réponse. $n = 7$; $e \approx 2,71825$.

Correction de l'exercice 2 - Le sinus de 0,1

Le DL de $\sin$ ne contient pas de terme en x^4 : on peut appliquer Taylor-Lagrange à l'ordre 4, avec $|\sin^{(5)}| = |\cos| \leq 1$:

$$\left| \sin x - \left(x - \frac{x^3}{6} \right) \right| \leq \frac{|x|^5}{5!}$$

- Pour $x = 0,1$: approximation $0,1 - \frac{0,001}{6} \approx 0,099\,833\,33$; erreur $\leq \frac{10^{-5}}{120} \approx 8,3 \times 10^{-8}$.
- Valeur exacte : $\sin 0,1 \approx 0,099\,833\,42$; l'erreur réelle vaut $8,3 \times 10^{-8}$, presque exactement la borne (le terme suivant est $\frac{x^5}{120}$).

Réponse. $\approx 0,0998333$; erreur $\leq 8,3 \times 10^{-8}$.

Correction de l'exercice 3 - Le cosinus de 1

$\cos x \approx 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24}$; le terme en x^5 est nul, et $|\cos^{(6)}| \leq 1$:

$$\left| \cos 1 - \left(1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{24} \right) \right| \leq \frac{1}{6!} = \frac{1}{720} \approx 0,0014$$

- Approximation : $\frac{13}{24} \approx 0,5417$.
- Valeur exacte : $\cos 1 \approx 0,5403$; erreur réelle $\approx 0,0014$. Même loin de 0 (en $x = 1$), quelques termes suffisent pour deux décimales, car les factorielles grandissent vite.

Réponse. $\frac{13}{24} \approx 0,5417$; erreur $\leq \frac{1}{720}$.

Correction de l'exercice 4 - Une inégalité par Taylor

Pour $x > 0$, il existe $c \in]0 ; x[$ tel que

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{e^c}{6}x^3$$

- Le reste $\frac{e^c x^3}{6}$ est positif (car $x > 0$) : l'inégalité est prouvée (égalité en 0).
- Pour $x < 0$, le reste est négatif : l'inégalité s'inverse. Le signe du reste de Lagrange dépend de la parité de l'ordre et du signe de x .

Réponse. Reste de Lagrange $\frac{e^c x^3}{6} \geq 0$.

Correction de l'exercice 5 - Une série pour $\ln 2$

Le reste est $\sum_{k>n} \frac{1}{k 2^k} \leq \frac{1}{n+1} \sum_{k>n} \frac{1}{2^k}$, et la somme géométrique vaut $\frac{1}{2^n}$:

$$0 \leq \ln 2 - \sum_{k=1}^n \frac{1}{k 2^k} \leq \frac{1}{(n+1) 2^n}$$

- Pour $n = 7$: $\frac{1}{8 \times 128} = \frac{1}{1024} < 10^{-3}$; pour $n = 6$: $\frac{1}{7 \times 64} \approx 0,0022$, insuffisant.
- Avec 7 termes : $\approx 0,69226$, contre $\ln 2 \approx 0,69315$. La série $\sum \frac{(-1)^{k+1}}{k}$, qui converge aussi vers $\ln 2$, demanderait environ 1 000 termes : le choix du point de développement compte.

Réponse. 7 termes suffisent.

Correction de l'exercice 6 - Racine de 10

Avec $u = \frac{1}{9}$:

$$\sqrt{1+u} \approx 1 + \frac{u}{2} - \frac{u^2}{8} = 1 + \frac{1}{18} - \frac{1}{648}$$

- Donc $\sqrt{10} \approx 3 \left(1 + \frac{1}{18} - \frac{1}{648} \right) \approx 3,16204$.
- Valeur exacte : $3,16228$; l'erreur, $2,4 \times 10^{-4}$, est de l'ordre du terme suivant, $3 \times \frac{u^3}{16} \approx 2,6 \times 10^{-4}$.
- Astuce : on factorise par un carré proche (9) pour que u soit petit.

Réponse. $\sqrt{10} \approx 3,1620$.

Correction de l'exercice 7 - L'approximation du pendule

D'après le DL, $\frac{\theta - \sin \theta}{\theta} = \frac{\theta^2}{6} + o(\theta^2)$.

— $10^\circ = \frac{\pi}{18} \approx 0,1745 \text{ rad} : \frac{\theta^2}{6} \approx 0,0051$, soit 0,5 % (valeur exacte 0,507 %).

— Erreur de 1 % :

$$\frac{\theta^2}{6} = 0,01 \Leftrightarrow \theta = \sqrt{0,06} \approx 0,245 \text{ rad} \approx 14^\circ$$

— Au-delà d'une quinzaine de degrés, l'approximation linéaire du pendule devient grossière.

Réponse. $\approx 0,5\%$ à 10° ; 1% vers 14° .

Correction de l'exercice 8 - Le facteur de Lorentz

Avec $(1 + u)^{-1/2} = 1 - \frac{u}{2} + o(u)$ et $u = -\beta^2$:

$$\gamma = 1 + \frac{\beta^2}{2} + o(\beta^2)$$

— Pour $\beta = 0,1$: $\gamma \approx 1,005$; valeur exacte 1,005 04.

— Conséquence physique : l'énergie $\gamma mc^2 \approx mc^2 + \frac{1}{2}mv^2$: on retrouve l'énergie de masse plus l'énergie cinétique classique.

Réponse. $\gamma \approx 1 + \frac{\beta^2}{2}$; 1,005 contre 1,00504.

Correction de l'exercice 9 - Dérivées à partir d'un DL

On écrit le DL de $f : x^2 e^x = x^2 \left(1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + o(x^3) \right)$, donc le coefficient de x^5 est $a_5 = \frac{1}{6}$.

— Par unicité du DL et la formule de Taylor-Young, $a_5 = \frac{f^{(5)}(0)}{5!}$:

$$f^{(5)}(0) = 5! \times \frac{1}{6} = 20$$

— Vérification par la formule de Leibniz : $(x^2 e^x)^{(5)} = (x^2 + 10x + 20)e^x$, qui vaut bien 20 en 0.

Réponse. $f^{(5)}(0) = 20$.

Correction de l'exercice 10 - Somme alternée et erreur

Pour $x = 0,5$, les termes $\frac{x^{2k}}{(2k)!}$ de la série du cosinus décroissent en valeur absolue et alternent en signe : l'erreur est majorée par le premier terme omis,

$$\frac{x^6}{6!} = \frac{0,015625}{720} \approx 2,2 \times 10^{-5}$$

— Approximation : $1 - 0,125 + 0,002604 = 0,877604$.

— Valeur exacte : $\cos 0,5 \approx 0,877583$; l'erreur, $2,1 \times 10^{-5}$, est bien sous la borne, et l'approximation est par excès (le terme négligé est négatif).

Réponse. $\approx 0,87760$; erreur $\leq 2,2 \times 10^{-5}$.

Correction de l'exercice 11 - Arctangente de 1/2

Pour $|x| < 1$, $\arctan x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \dots$ est une somme alternée à termes décroissants. Pour $x = \frac{1}{2}$:

$$\frac{1}{2} - \frac{1}{24} + \frac{1}{160} \approx 0,46458$$

— Erreur $\leq \frac{(1/2)^7}{7} = \frac{1}{896} \approx 0,0011$.

— Valeur exacte : $\arctan \frac{1}{2} \approx 0,46365$; erreur réelle $\approx 0,0009$.

Réponse. $\approx 0,4646$; erreur $\leq 0,0011$.

Correction de l'exercice 12 - La limite $n(e - (1 + 1/n)^n)$

On a vu que $(1+x)^{1/x} = e - \frac{e}{2}x + o(x)$ au voisinage de 0. Avec $x = \frac{1}{n}$:

$$\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e - \frac{e}{2n} + o\left(\frac{1}{n}\right)$$

— Donc $n\left(e - \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n\right) = \frac{e}{2} + o(1) \rightarrow \frac{e}{2} \approx 1,359$.

— Pour $n = 100$: $1,01^{100} \approx 2,70481$ et $100 \times (2,71828 - 2,70481) \approx 1,347$, proche de la limite (le terme suivant est en $\frac{1}{n}$).

Réponse. Limite $\frac{e}{2}$; environ 1,347 pour $n = 100$.

Correction de l'exercice 13 - Choisir le point de développement

— En 0 avec $x = 0,9$: $0,9 - \frac{0,81}{2} = 0,495$; le terme suivant, $\frac{0,729}{3} = 0,243$, montre que l'erreur est énorme. La convergence est très lente quand x est proche de 1.

— Avec $\ln 2$ connu : $\ln(1 - 0,05) \approx -0,05 - \frac{0,0025}{2} = -0,05125$, avec une erreur de l'ordre de $\frac{0,05^3}{3} \approx 4 \times 10^{-5}$.

$$\ln 1,9 \approx 0,69315 - 0,05125 = 0,64190$$

— Valeur exacte : 0,64185. Règle : on développe au voisinage d'un point **proche** où la fonction est connue.

Réponse. La seconde méthode ($\approx 0,6419$, erreur $\approx 4 \times 10^{-5}$).

Correction de l'exercice 14 - Vrai ou faux ?

a) **Faux** : un DL est une information **locale** ; il ne dit rien pour un x éloigné de 0 (un $o(x^n)$ peut être grand en $x = 1$).

b) **Vrai** : c'est tout son intérêt, avec une constante explicite.

c) **Faux** : on obtient ≈ 1477 , alors que $e^{10} \approx 22026$. Le reste est énorme car $\frac{10^6}{6!} \approx 1389$ n'est pas petit.

$$|R_5(10)| \leq \frac{e^{10} \times 10^6}{720}$$

d) **Vrai** : il vaut $\frac{e^c}{(n+1)!} x^{n+1} > 0$.

Réponse. a) faux · b) vrai · c) faux · d) vrai.

Correction de l'exercice 15 - Synthèse : $\ln 1,2$ avec certitude

a) $f(x) = \ln(1+x)$ a pour dérivée quatrième $f^{(4)}(t) = -\frac{6}{(1+t)^4}$, majorée en valeur absolue par 6 sur $[0; x]$. L'inégalité de Taylor-Lagrange à l'ordre 3 donne

$$|R_3(x)| \leq \frac{6x^4}{4!} = \frac{x^4}{4}$$

- b) Pour $x = 0,2$: $0,2 - 0,02 + 0,002\,667 = 0,182\,667$, et $\frac{0,2^4}{4} = 0,0004$. Donc $0,182\,27 \leq \ln 1,2 \leq 0,183\,07$.
- Valeur exacte : $\ln 1,2 \approx 0,182\,32$, bien dans l'encadrement (erreur réelle $\approx 0,000\,35$).

Réponse. $0,18227 \leq \ln 1,2 \leq 0,18307$.