

Plaquette 1 - Formules de Taylor, DL usuels et applications aux limites

Développements limités et formules de Taylor — Licence 1 (L1)

Corrections détaillées

Boîte à outils

Formules de Taylor.

- **Taylor-Young** (local) : si f est n fois dérivable en a ,

$$f(a+h) = \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(a)}{k!} h^k + o(h^n)$$

- **Taylor-Lagrange** (global) : il existe c entre a et x tel que le reste vaille $\frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!} (x-a)^{n+1}$ — utile pour **majorer** l'erreur.

DL usuels en 0.

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + o(x^3) \quad \frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + x^3 + o(x^3)$$

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + o(x^3) \quad (1+x)^\alpha = 1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2} x^2 + o(x^2)$$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} + o(x^4) \quad \sin x = x - \frac{x^3}{6} + o(x^4) \quad \tan x = x + \frac{x^3}{3} + o(x^4)$$

Règles de calcul.

- **Somme** : on additionne à l'ordre le **plus petit** des deux.
- **Produit** : on développe et on **tronque** à l'ordre voulu.
- **Quotient** : on se ramène à $\frac{1}{1+u}$ avec $u \rightarrow 0$.
- **Composition** : on substitue, en tenant compte de la **valuation** (ordre du premier terme non nul) pour choisir l'ordre nécessaire.
- **Unicité** : deux DL du même ordre en un même point sont **identiques** coefficient par coefficient.

Applications.

- **Limites** : un DL à l'ordre n lève toute indétermination dont le dénominateur est en x^n .
- **Tangente et position** : les termes de degré ≤ 1 donnent la tangente ; le premier terme suivant donne la **position** (degré pair : même côté ; impair : traversée).
- **Équivalent** : le **premier terme non nul** du DL.

Correction de l'exercice 1 - DL de l'exponentielle

- **Substitution** $x \rightarrow 2x$ dans le DL de e^u :

$$e^{2x} = 1 + 2x + \frac{4x^2}{2} + \frac{8x^3}{6} + o(x^3) = 1 + 2x + 2x^2 + \frac{4x^3}{3} + o(x^3)$$

- **Application numérique** avec $x = 0,1$ (donc $2x = 0,2$) :

$$e^{0,2} \approx 1 + 0,2 + 0,02 + 0,001333 = 1,221333$$

- **Valeur exacte** : $e^{0,2} = 1,2214028$.
- **Erreur** : 7×10^{-5} — conforme au terme suivant $\frac{(0,2)^4}{24} \approx 6,7 \times 10^{-5}$ ✓
- **Contrôle de la méthode** : on peut aussi appliquer directement le DL de e^u en $u = 0,2$ — c'est le même calcul.

Réponse. $1 + 2x + 2x^2 + \frac{4x^3}{3} + o(x^3)$; $e^{0,2} \approx 1,22133$.

Correction de l'exercice 2 - DL d'un produit

- $\ln(1+x)$ a une **valuation** 1 : il suffit donc de e^x à l'ordre 2.
- $e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2}$ et $\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3}$.
- **Produit**, en ne gardant que les degrés ≤ 3 :

$$x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + x^2 - \frac{x^3}{2} + \frac{x^3}{2}$$
- **Regroupement** : coefficient de x : 1 ; de x^2 : $-\frac{1}{2} + 1 = \frac{1}{2}$; de x^3 : $\frac{1}{3} - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = \frac{1}{3}$.
- **Résultat** : $f(x) = x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + o(x^3)$.
- **Contrôle numérique** en $x = 0,1$: le DL donne $0,1 + 0,005 + 0,000333 = 0,105333$; la valeur exacte est $1,10517 \times 0,0953102 \approx 0,105337$ ✓
- **Économie** : inutile de développer e^x à l'ordre 3 — son terme cubique, multiplié par x , dépasserait l'ordre demandé.

Réponse. $x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + o(x^3)$.

Correction de l'exercice 3 - DL d'un quotient

- **Numérateur** : $e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2} + o(x^2)$.
- **Dénominateur** : $\frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 + o(x^2)$.
- **Produit** tronqué à l'ordre 2 :

$$\left(1 + x + \frac{x^2}{2}\right)(1 - x + x^2) = 1 + (1-1)x + \left(1-1+\frac{1}{2}\right)x^2 + o(x^2)$$
- **Résultat** : $\frac{e^x}{1+x} = 1 + \frac{x^2}{2} + o(x^2)$.
- **Lecture** : le terme d'ordre 1 **disparaît** — la fonction admet une tangente **horizontale** en 0, et un **minimum local** (coefficient de x^2 positif).
- **Contrôle** en $x = 0,1$: le DL donne 1,005 ; la valeur exacte est $\frac{1,10517}{1,1} = 1,004700$ ✓
- **Vérification par dérivation** : $f'(x) = \frac{xe^x}{(1+x)^2}$, qui s'annule bien en 0 ✓

Réponse. $1 + \frac{x^2}{2} + o(x^2)$.

Correction de l'exercice 4 - DL par composition

- **Argument** : $u = \sin x = x - \frac{x^3}{6} + o(x^4)$, de valuation 1.
- **Puissances nécessaires** : $u^2 = x^2 - \frac{x^4}{3} + o(x^4)$; $u^3 = x^3 + o(x^4)$; $u^4 = x^4 + o(x^4)$.

- **Substitution** dans $e^u = 1 + u + \frac{u^2}{2} + \frac{u^3}{6} + \frac{u^4}{24}$:
- terme en x : 1 ;
- en x^2 : $\frac{1}{2}$;
- en x^3 : $-\frac{1}{6} + \frac{1}{6} = 0$;
- en x^4 : $-\frac{1}{6} + \frac{1}{24} = -\frac{1}{8}$ (le terme $-\frac{x^4}{6}$ vient de $\frac{u^2}{2}$).
- **Résultat** :

$$e^{\sin x} = 1 + x + \frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{8} + o(x^4)$$

- **Contrôle** en $x = 0,2$: le DL donne 1,219800 ; la valeur exacte $e^{\sin 0,2} = e^{0,198669} = 1,219778$ ✓
- **Vigilance** : le coefficient de x^3 est **nul**, mais il faut le vérifier par le calcul — on ne peut pas le deviner.

Réponse. $1 + x + \frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{8} + o(x^4)$.

Correction de l'exercice 5 - Limite par DL

- **Ordre nécessaire** : le dénominateur est en x^4 , il faut donc le DL de $\cos$ à l'**ordre 4**.

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} + o(x^4)$$

- **Numérateur** :

$$\cos x - 1 + \frac{x^2}{2} = \frac{x^4}{24} + o(x^4)$$

- **Quotient** : $\frac{x^4/24 + o(x^4)}{x^4} \rightarrow \frac{1}{24} \approx 0,04167$.
- **Contrôle** en $x = 0,1$: le numérateur vaut $4,1666 \times 10^{-6}$, et $\frac{4,1666 \times 10^{-6}}{10^{-4}} = 0,041666$ ✓
- **Erreur à éviter** : un DL à l'ordre 2 donnerait $\frac{o(x^2)}{x^4}$ — **aucune** information. L'ordre doit **égaler** le degré du dénominateur.

Réponse. La limite vaut $\frac{1}{24}$.

Correction de l'exercice 6 - Forme indéterminée puissance

- **Passage au logarithme** : la quantité vaut $\exp\left(\frac{1}{x} \ln \frac{e^x - 1}{x}\right)$.
- **DL du quotient** : $\frac{e^x - 1}{x} = 1 + \frac{x}{2} + \frac{x^2}{6} + o(x^2)$.
- **DL du logarithme** (avec $u = \frac{x}{2} + \dots \rightarrow 0$) :

$$\ln\left(1 + \frac{x}{2} + \frac{x^2}{6}\right) = \frac{x}{2} + \frac{x^2}{6} - \frac{1}{2}\left(\frac{x}{2}\right)^2 + o(x^2) = \frac{x}{2} + \left(\frac{1}{6} - \frac{1}{8}\right)x^2 + o(x^2)$$

- Le coefficient de x^2 vaut $\frac{1}{24}$.
- **Division par x** : $\frac{1}{2} + \frac{x}{24} + o(x) \rightarrow \frac{1}{2}$.
- **Limite** : $e^{1/2} = \sqrt{e} \approx 1,6487$.

— **Contrôle** en $x = 0,01$: $\frac{e^{0,01} - 1}{0,01} = 1,0050167$, et $1,0050167^{100} \approx 1,6501$ ✓

Réponse. La limite vaut $\sqrt{e} \approx 1,649$.

Correction de l'exercice 7 - Tangente et position

— **DL à l'ordre 2** : $f(x) = x - \frac{x^2}{2} + o(x^2)$.

— **Tangente** (partie affine) : $y = x$.

— **Position** : $f(x) - x = -\frac{x^2}{2} + o(x^2)$, du signe de $-\frac{x^2}{2} < 0$.

— La courbe est donc **en dessous** de sa tangente au voisinage de 0 — cohérent avec la **concavité** de $\ln(1+x)$.

— **Contrôle** : $\ln(1,1) = 0,09531 < 0,1$ ✓ et $\ln(0,9) = -0,10536 < -0,1$ ✓

— **Règle générale** : le premier terme non nul après la partie affine décide. Degré **pair** : la courbe reste du même côté ; degré **impair** : elle **traverse** la tangente (point d'inflexion).

— **Exemple du cas impair** : $\sin x = x - \frac{x^3}{6} + o(x^3)$ — la courbe traverse $y = x$ en 0.

Réponse. Tangente $y = x$; courbe en dessous (terme $-\frac{x^2}{2}$).

Correction de l'exercice 8 - Équivalent

— **Les équivalents ne suffisent pas** : $\tan x \sim x$ et $\sin x \sim x$ donneraient « $x - x$ », sans signification.

— **Passage au DL à l'ordre 3** :

$$\tan x = x + \frac{x^3}{3} + o(x^3), \quad \sin x = x - \frac{x^3}{6} + o(x^3)$$

— **Différence** : $\left(\frac{1}{3} + \frac{1}{6}\right)x^3 = \frac{x^3}{2}$, donc

$$\tan x - \sin x \sim \frac{x^3}{2}$$

— **Contrôle** en $x = 0,1$: la valeur exacte est $5,0104 \times 10^{-4}$, et $\frac{0,001}{2} = 5 \times 10^{-4}$ ✓

— **Règle d'or** : dès qu'il y a **soustraction de quantités équivalentes**, abandonner les équivalents et passer au développement limité.

— **Alternative élégante** : $\tan x - \sin x = \sin x \left(\frac{1}{\cos x} - 1 \right) \sim x \times \frac{x^2}{2}$ ✓

Réponse. $\tan x - \sin x \sim \frac{x^3}{2}$.

Correction de l'exercice 9 - Taylor-Lagrange et majoration

— **Taylor-Lagrange à l'ordre 3** : le reste vaut $\frac{f^{(4)}(c)}{4!}x^4$ pour un c entre 0 et x .

— Or $f^{(4)} = \sin$, donc $|f^{(4)}(c)| \leq 1$.

— **Majoration** :

$$|\text{erreur}| \leq \frac{0,5^4}{24} = \frac{0,0625}{24} \approx 2,60 \times 10^{-3}$$

— **Valeurs réelles** : l'approximation donne $0,5 - 0,0208333 = 0,4791667$, et $\sin(0,5) = 0,4794255$.

- **Erreur effective** : $2,59 \times 10^{-4}$ — dix fois **meilleure** que la majoration.
- **Explication** : le terme d'ordre 4 du DL de $\sin$ est **nul** (fonction impaire) ; l'erreur réelle est en $\frac{x^5}{120} = 2,6 \times 10^{-4}$ ✓
- **Intérêt de Taylor-Lagrange** : c'est la seule formule qui fournit une **majoration explicite** de l'erreur, indispensable en calcul numérique.

Réponse. Erreur $\leq \frac{0,5^4}{24} \approx 2,6 \times 10^{-3}$ (réelle : $2,6 \times 10^{-4}$).

Correction de l'exercice 10 - DL en un point quelconque

Méthode 1 — Taylor-Young.

- $f(4) = 2$; $f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$ donc $f'(4) = \frac{1}{4}$; $f''(x) = -\frac{1}{4x^{3/2}}$ donc $f''(4) = -\frac{1}{32}$.

$$\sqrt{4+h} = 2 + \frac{h}{4} - \frac{h^2}{64} + o(h^2)$$

Méthode 2 — factorisation. $\sqrt{4+h} = 2\sqrt{1+\frac{h}{4}}$, et $(1+u)^{1/2} = 1 + \frac{u}{2} - \frac{u^2}{8} + o(u^2)$.

- Avec $u = \frac{h}{4}$: $2\left(1 + \frac{h}{8} - \frac{h^2}{128}\right) = 2 + \frac{h}{4} - \frac{h^2}{64}$ ✓ — **même résultat.**
- **Contrôle** avec $h = 0,4$: le DL donne $2 + 0,1 - 0,0025 = 2,0975$; la valeur exacte $\sqrt{4,4} \approx 2,097618$ ✓
- **Conseil** : la **factorisation** est souvent plus rapide que le calcul des dérivées successives, surtout aux ordres élevés.

Réponse. $\sqrt{4+h} = 2 + \frac{h}{4} - \frac{h^2}{64} + o(h^2)$.

Correction de l'exercice 11 - Développement asymptotique

- **Factorisation** : pour $x > 0$, $f(x) = x\sqrt{1+\frac{1}{x}}$.
- **DL de** $(1+u)^{1/2}$ avec $u = \frac{1}{x} \rightarrow 0$:

$$\sqrt{1+u} = 1 + \frac{u}{2} - \frac{u^2}{8} + o(u^2)$$

- **Multiplication par** x :

$$f(x) = x + \frac{1}{2} - \frac{1}{8x} + o\left(\frac{1}{x}\right)$$

- **Lecture** : la droite $y = x + \frac{1}{2}$ est **asymptote oblique**, et la courbe est **en dessous** (le terme suivant est négatif).
- **Contrôle** en $x = 100$: $f(100) = \sqrt{10100} \approx 100,498756$; le développement donne $100 + 0,5 - 0,00125 = 100,49875$ ✓
- **Méthode générale** : en $+\infty$, on factorise par le terme dominant et l'on pose $u = \frac{1}{x}$ pour se ramener à un DL en 0.

Réponse. $f(x) = x + \frac{1}{2} - \frac{1}{8x} + o\left(\frac{1}{x}\right)$.

Correction de l'exercice 12 - Extremum par DL

- **DL à l'ordre 4** : $e^x + e^{-x} = 2\cosh x = 2\left(1 + \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24}\right) + o(x^4)$.

$$f(x) = 2 + x^2 + \frac{x^4}{12} - x^2 + o(x^4) = 2 + \frac{x^4}{12} + o(x^4)$$

- **Lecture** : les termes de degré 1, 2 et 3 sont **nuls** — le critère de la dérivée seconde est **inopérant** ($f''(0) = 0$).
- Le premier terme non constant est $\frac{x^4}{12} > 0$ (degré **pair**, coefficient positif).
- **Conclusion** : 0 est un **minimum local** (et même global par symétrie et croissance), de valeur 2.
- **Contrôles** : $f(0,5) = 1,6487 + 0,6065 - 0,25 = 2,0052 \checkmark$ et $f(1) = 2,7183 + 0,3679 - 1 = 2,0862 \checkmark$
- **Leçon** : quand la dérivée seconde s'annule, le DL d'ordre supérieur **tranche** — c'est sa supériorité sur le simple tableau de variations.

Réponse. $f(x) = 2 + \frac{x^4}{12} + o(x^4)$: minimum local de valeur 2.

Correction de l'exercice 13 - Logarithme de 1,1

Le développement usuel, obtenu en intégrant $\frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - x^3 + o(x^3)$:

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + o(x^4)$$

- Pour $x = 0,1$: $0,1 - 0,005 + 0,000\,333 - 0,000\,025 = 0,095\,308$.
- Valeur exacte : $\ln 1,1 \approx 0,095\,310$. L'écart, environ 2×10^{-6} , est de l'ordre du terme suivant, $\frac{x^5}{5} = 2 \times 10^{-6}$.
- Près de 0, chaque terme supplémentaire gagne un facteur 10 en précision (ici $x = 0,1$).

Réponse. $\ln 1,1 \approx 0,095\,308$ (valeur exacte 0,095 310).

Correction de l'exercice 14 - L'arctangente par intégration

En remplaçant u par x^2 dans $\frac{1}{1+u} = 1 - u + u^2 + o(u^2)$:

$$\frac{1}{1+x^2} = 1 - x^2 + x^4 + o(x^4)$$

- arctan est la primitive de $\frac{1}{1+x^2}$ nulle en 0 ; on intègre terme à terme (primitivation d'un développement limité) :
- $\arctan x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + o(x^5)$.
- Contrôle : $\arctan 0,1 \approx 0,1 - 0,000\,333 + 0,000\,002 = 0,099\,669$, conforme à la valeur exacte.

Réponse. $\arctan x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + o(x^5)$.

Correction de l'exercice 15 - Synthèse : limite délicate

— **Écriture exponentielle** : $(1+x)^{1/x} = \exp\left(\frac{\ln(1+x)}{x}\right)$.

— **DL de l'exposant** :

$$\frac{\ln(1+x)}{x} = \frac{x - \frac{x^2}{2} + o(x^2)}{x} = 1 - \frac{x}{2} + o(x)$$

— **Exponentielle** :

$$(1+x)^{1/x} = e \times \exp\left(-\frac{x}{2} + o(x)\right) = e\left(1 - \frac{x}{2} + o(x)\right)$$

- **Numérateur** : $(1+x)^{1/x} - e = -\frac{ex}{2} + o(x)$.
- **Limite du quotient** : $-\frac{e}{2} \approx -1,3591$.
- **Contrôle** en $x = 0,01$: $(1,01)^{100} \approx 2,704814$, donc le numérateur vaut $-0,013468$ et le quotient $-1,3468$ ✓
- **Interprétation** : la fonction $x \mapsto (1+x)^{1/x}$ se prolonge par continuité en 0 avec la valeur e , et sa **dérivée** en 0 vaut $-\frac{e}{2}$ — c'est exactement ce que calcule cette limite.

Réponse. La limite vaut $-\frac{e}{2} \approx -1,359$.