

Plaquette 2 – Calculer des développements limités

Développements limités — Licence 1 (L1)

Exercices

Méthode

On ne calcule presque jamais un développement limité (DL) par les dérivées successives : on **combine les DL usuels** par somme, produit, composition, quotient (via $\frac{1}{1-u}$) et primitivation. La règle d'or est de **tronquer au bon ordre** : dans un produit, on ne garde que les termes de degré au plus n ; dans une composée $g(u(x))$, il faut que $u(x) \rightarrow 0$ et on développe g jusqu'à l'ordre voulu en u . Pour un DL en $a \neq 0$, on pose $x = a + h$ et on développe en h .

Exercice 1 - La tangente à l'ordre 5

Calculer le DL de $\tan x$ à l'ordre 5 en 0 en utilisant $\tan = \frac{\sin}{\cos}$.

Exercice 2 - Une composée avec l'exponentielle

Calculer le DL de $e^{\sin x}$ à l'ordre 3 en 0.

Exercice 3 - La racine carrée

Écrire le DL de $\sqrt{1+x}$ à l'ordre 3, puis en déduire une valeur approchée de $\sqrt{1,02}$.

Exercice 4 - Logarithme du cosinus

Calculer le DL de $\ln(\cos x)$ à l'ordre 4 en 0.

Exercice 5 - Un produit tronqué

Calculer le DL de $e^x \cos x$ à l'ordre 3 en 0.

Exercice 6 - L'arcsinus par intégration

Obtenir le DL de $\arcsin x$ à l'ordre 3 en 0 à partir de sa dérivée.

Exercice 7 - Un DL en 1

Écrire le DL de $\ln x$ à l'ordre 3 au voisinage de 1, puis celui de $\frac{1}{x}$ à l'ordre 2 au voisinage de 2.

Exercice 8 - Le sinus hyperbolique

Écrire le DL de $\operatorname{sh} x$ à l'ordre 5 et celui de $\operatorname{ch} x$ à l'ordre 4, à partir de celui de e^x .

Exercice 9 - Un quotient classique

Calculer le DL de $\frac{x}{e^x - 1}$ à l'ordre 2 en 0 (la fonction étant prolongée par 1 en 0).

Exercice 10 - L'inverse du cosinus

Calculer le DL de $\frac{1}{\cos x}$ à l'ordre 4 en 0 et vérifier qu'il est pair.

Exercice 11 - Une puissance variable

Calculer le DL de $(1 + x)^{1/x}$ à l'ordre 2 en 0.

Exercice 12 - Parité et coefficients

Sans calcul, dire quels coefficients sont nuls dans les DL en 0 de $x \sin x$, $\ln(1 + x^2)$, $\frac{\sin x}{1 + x^2}$ et e^{x^2} . Puis calculer le DL de e^{x^2} à l'ordre 6.

Exercice 13 - L'erreur de troncature

Un étudiant calcule le DL à l'ordre 3 de $\sin x e^x$ en écrivant $\sin x = x + o(x)$ et $e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + o(x^3)$. Où est l'erreur ? Faire le calcul correct.

Exercice 14 - Vrai ou faux ?

- a) Si $f(x) = 1 + 2x + o(x)$ au voisinage de 0, alors f est dérivable en 0 et $f'(0) = 2$.
- b) Si $f(x) = 1 + 2x + 3x^2 + o(x^2)$, alors $f'(0) = 3$.
- c) $o(x^2) + o(x^2) = o(x^2)$.
- d) $x \times o(x^2) = o(x^3)$.

Exercice 15 - Synthèse : une différence de deux DL

Soit $f(x) = \sqrt{1 + x} - e^{x/2}$.

- a) Calculer le DL de f à l'ordre 3 en 0.
- b) En déduire un équivalent de f en 0 et la limite de $\frac{f(x)}{x^2}$.
- c) Donner le signe de f au voisinage de 0.