

Plaquette 3 - Limites et équivalents par développements limités

Développements limités — Licence 1 (L1)

Exercices

Méthode

Pour lever une forme indéterminée, on développe numérateur et dénominateur **jusqu'au premier terme non nul** : c'est lui qui donne un **équivalent**. On choisit l'ordre en conséquence (si le dénominateur est en x^3 , il faut développer le numérateur au moins à l'ordre 3). En $+\infty$, on pose $t = \frac{1}{x} \rightarrow 0$. Pour une puissance variable u^v , on passe à $\exp(v \ln u)$ et on développe l'exposant. Les équivalents se **multiplient** et se **divisent**, mais ne s'**additionnent** pas : c'est pourquoi on passe par les DL.

Exercice 1 - Deux limites de référence

Déterminer $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x - x}{x^3}$ et $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1 - x}{x^2}$.

Exercice 2 - Une différence d'inverses

Déterminer $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{\sin^2 x} - \frac{1}{x^2} \right)$.

Exercice 3 - Cosinus puissance $1/x^2$

Écrire $(\cos x)^{1/x^2}$ sous la forme $\exp(g(x))$, développer $g(x)$ au voisinage de 0, et en déduire la limite de $(\cos x)^{1/x^2}$ en 0.

Exercice 4 - Tangente moins sinus

Déterminer un équivalent de $\tan x - \sin x$ en 0 et en déduire $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan x - \sin x}{x^3}$.

Exercice 5 - Une limite en l'infini

Déterminer $\lim_{x \rightarrow +\infty} x^2 \left(e^{1/x} - 1 - \frac{1}{x} \right)$.

Exercice 6 - Une racine en l'infini

Déterminer $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\sqrt{x^2 + x} - x \right)$ par un DL, puis donner le terme suivant du développement.

Exercice 7 - Une puissance délicate

Déterminer $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{x} \right)^{x^2} e^{-x}$.

Exercice 8 - Deux équivalents

Déterminer un équivalent en 0 de $\sin x - x \cos x$ et de $a^x - b^x$ ($a, b > 0$, $a \neq b$).

Exercice 9 - Somme de deux développements

Développer $e^x - \cos x - x$ à l'ordre 2 en 0, puis en déduire la limite en 0 de $\frac{e^x - \cos x - x}{x^2}$.

Exercice 10 - Un quotient d'écart

Comparer les premiers termes non nuls de $\arctan x - x$ et de $\sin x - x$ en 0. Que vaut la limite de leur quotient $\frac{\arctan x - x}{\sin x - x}$?

Exercice 11 - Équivalent d'une suite

Déterminer un équivalent de $u_n = n(e^{1/n} - 1) - 1$ quand $n \rightarrow +\infty$.

Exercice 12 - Pourquoi on n'additionne pas les équivalents

On a $\ln(1+x) \sim x$ et $\sin x \sim x$ en 0. Un étudiant en déduit $\ln(1+x) - \sin x \sim 0$. Pourquoi est-ce absurde ? Trouver le bon équivalent.

Exercice 13 - Une limite avec racines

Déterminer $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+x} - 1 - \frac{x}{2}}{x^2}$ et $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt[3]{1+x} - 1}{x}$.

Exercice 14 - Vrai ou faux ?

En 0 :

- a) Si $f \sim g$, alors $e^f \sim e^g$.
- b) Si $f \sim g$ et $g \rightarrow 0$, alors $f \rightarrow 0$.
- c) $x + x^2 \sim x$.
- d) Si $f \sim g$, alors $f^2 \sim g^2$.

Exercice 15 - Synthèse : l'écart à e

En utilisant le développement $(1+x)^{1/x} = e\left(1 - \frac{x}{2} + \frac{11}{24}x^2\right) + o(x^2)$:

- a) Déterminer $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1+x)^{1/x} - e}{x}$.
- b) En déduire un équivalent de $\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n - e$ quand $n \rightarrow +\infty$.