

Plaquette 4 - Position, asymptotes et extremums par développements limités

Développements limités — Licence 1 (L1)

Exercices

Méthode

Un DL au voisinage de a , $f(x) = a_0 + a_1(x - a) + a_p(x - a)^p + o((x - a)^p)$ avec $a_p \neq 0$, donne d'un coup la **tangente** ($y = a_0 + a_1(x - a)$) et la **position** de la courbe : elle est du signe de $a_p(x - a)^p$. Si p est pair, la courbe reste d'un seul côté ; si p est impair, elle traverse (point d'inflexion). En un point où $f'(a) = 0$, le même raisonnement dit s'il y a un **extremum**. En $\pm\infty$, on écrit $f(x) = ax + b + \frac{c}{x} + o\left(\frac{1}{x}\right)$: la droite $y = ax + b$ est **asymptote**, et le signe de $\frac{c}{x}$ donne la position.

Exercice 1 - Sous la tangente

Soit $f(x) = e^x - x^2$. Donner la tangente en 0 et la position de la courbe au voisinage de 0.

Exercice 2 - Traverser sa tangente

Étudier la position des courbes de $\sin x$ et de $g(x) = \ln(1 + x) - x + \frac{x^2}{2}$ par rapport à leur tangente en 0.

Exercice 3 - Une asymptote oblique

Soit $f(x) = x e^{1/x}$. Déterminer l'asymptote de sa courbe en $+\infty$ et en $-\infty$, et la position de la courbe.

Exercice 4 - Une racine cubique

Déterminer l'asymptote en $+\infty$ de $f(x) = \sqrt[3]{x^3 + 2x^2}$ et la position de la courbe.

Exercice 5 - Un minimum invisible à la dérivée seconde

Soit $f(x) = \cos x + \frac{x^2}{2}$. Calculer $f'(0)$ et $f''(0)$. 0 est-il un extremum local ?

Exercice 6 - Un maximum en 0

Soit $g(x) = x \sin x - x^2$. Étudier la nature du point 0.

Exercice 7 - Point critique : extremum ou non ?

Déterminer la nature du point 0 pour $h(x) = e^x - 1 - x - x^3$ et pour $k(x) = x - \sin x$.

Exercice 8 - Position en un point quelconque

Donner la tangente à la courbe de $\ln$ en 1 et la position de la courbe, à l'aide d'un DL en 1.

Exercice 9 - Deux asymptotes différentes

Soit $f(x) = \sqrt{x^2 + x + 1}$. Déterminer ses asymptotes en $+\infty$ et en $-\infty$, et la position de la courbe.

Exercice 10 - Deux courbes tangentes

Montrer que les courbes de e^x et de $1 + \ln(1 + x)$ ont la même tangente en 0, et préciser leur position relative au voisinage de 0.

Exercice 11 - Un DL qui donne la dérivée

On sait que f est de classe C^3 et que $f(x) = 2 - 3x + 5x^3 + o(x^3)$ au voisinage de 0. Donner $f(0)$, $f'(0)$, $f''(0)$, $f'''(0)$ et la position de la courbe par rapport à sa tangente en 0.

Exercice 12 - Une asymptote horizontale

Soit $f(x) = x^2 \left(1 - \cos \frac{1}{x}\right)$. Déterminer sa limite en $+\infty$ et la position de la courbe par rapport à l'asymptote.

Exercice 13 - Trouver un paramètre

Déterminer les réels a et b pour que $f(x) = e^x - \frac{1 + ax}{1 + bx}$ vérifie $f(x) = o(x^2)$ au voisinage de 0.

Exercice 14 - Vrai ou faux ?

- a) Si $f(x) = 1 + x^3 + o(x^3)$ en 0, f a un extremum local en 0.
- b) Si $f(x) = 1 - 2x^4 + o(x^4)$ en 0, f a un maximum local en 0.
- c) Si $f(a) = 0$ et $f'(a) = 0$, f n'a pas d'extremum en a .
- d) Une courbe peut couper son asymptote.

Exercice 15 - Synthèse : étude asymptotique complète

Soit $f(x) = (x + 1)e^{1/x}$.

- a) Montrer que $f(x) = x + 2 + \frac{3}{2x} + o\left(\frac{1}{x}\right)$ en $\pm\infty$.
- b) En déduire l'asymptote et la position de la courbe en $+\infty$ et en $-\infty$.
- c) Déterminer la limite de f en 0^- et en 0^+ .